وزن‌های مشترک برای رتبه‌بندی کامل واحدهای تصمیم‌گیری با تحلیل رگرسیون

حجت اثباتی
گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

حسین عزیزی
گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

شهروز فتحی اجیرلو
گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

چکیده

روش‌های موجود برای ایجاد وزن‌های مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یا خیلی پیچیده‌اند و یا اینکه قادر نیستند رتبه‌بندی کاملی از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) به دست بدهند. این مقاله رویکرد جدیدی را بر اساس تحلیل رگرسیون برای به دست آوردن یک مجموعه‌ی وزن‌های مشترک ارائه می‌کند که برآورد آنها آسان است و می‌توانند رتبه‌بندی کاملی از DMUها ارائه کنند. کارایی DMUها که با مطلوب‌ترین وزن‌ها به دست آمده‌اند، به عنوان کارایی‌های هدف DMUها محسوب می‌شوند و بهترین برازش آنها با کارایی‌های حاصل از وزن‌های مشترک محاسبه می‌شود.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها؛ تحلیل رگرسیون؛ وزن‌های مشترک؛ کارایی هدف؛ رتبه‌بندی.

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) که توسط Charnes، Cooper و Rhodes (۱۹۷۸) ابداع شد، یک روش ناپارامتری برای سنجش عملکرد گروهی از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) است که ورودی‌های متعدد را مصرف می‌کنند و خروجی‌های متعدد را تولید می‌نمایند. این روش نیاز به هیچگونه فرضی از روابط کارکردی بین ورودی‌ها و خروجی‌ها ندارد و به هر کدام از DMUها امکان می‌دهد که کارایی خود را با وزن‌های ورودی و خروجی که فقط برای خودشان مطلوب‌تر هستند، ارزیابی کنند. این انعطاف‌پذیری در انتخاب وزن‌های ورودی و خروجی غالباً سبب می‌شود که بیشتر از یک DMU به عنوان کارای DEA شناسایی شود و لذا امکان افتراق کامل بین آنها وجود نداشته باشد. از سوی دیگر، استفاده از وزن‌های متغیر برای DMUهای مختلف سبب می‌شود که نتوان کار آنها را بر یک مبنای مشترک مقایسه و رتبه‌بندی کرد.

Kao و Hung (۲۰۰۵) بیان کرده‌اند که استفاده از مجموعه‌های متفاوت وزن‌ها برای طبقه‌بندی به عنوان کارا و ناکارا قابل قبول است، اما اگر مجموعه‌های متفاوت وزن برای رتبه‌بندی استفاده می‌شوند، ممکن است اکثر محققان موافق نباشند. برای کاهش انعطاف‌پذیری در انتخاب وزن‌های ورودی و خروجی، پیشنهاد شده است که برای سنجش عملکرد DMUها، به جای وزن‌های متغیر از وزن‌های مشترک استفاده شود. استفاده از وزن‌های مشترک امکان آن را فراهم می‌کند که عملکرد DMUها بر یک مبنای یکسان مقایسه و رتبه‌بندی شود.

برای به دست آوردن یک مجموعه‌ی وزن‌های مشترک برای DMUها، رویکردهای متعددی در مقالات DEA معرفی شده‌اند. مثلاً Ganley و Cubbin (۱۹۹۲) وزن‌های مشترک را با بیشینه‌سازی مجموع کارایی‌های DMUها، تعیین کردند. Roll، Cook، و Golany (۱۹۹۱) و Roll و Golany (۱۹۹۳) چند روش دیگر را برای محاسبه‌ی وزن‌های مشترک پیشنهاد کردند، شامل اجرای یک مدل DEAی عمومی بدون کران برای به دست آوردن مجموعه‌های مختلف وزن و بعد گرفتن متوسط یا متوسط وزنی آنها با کارایی‌های DEA به عنوان وزن، بیشینه‌سازی کارایی متوسط DMUها، بیشینه‌سازی تعداد واحدهای کارای DEA، و رتبه‌بندی عوامل مختلف بر اساس یک ترتیب اهمیت و بعد اختصاص وزن‌های پایین به عوامل کم‌اهمیت‌تر و وزن‌های شدنی بیشینه به عوامل مهم. Sinuany-Stern، Mehrez، و Barboy (۱۹۹۴) یک رویکرد تحلیل افتراقی خطی دومرحله‌ای برای ایجاد وزن‌های مشترک ایجاد کردند. Friedman و Sinuany-Stern (۱۹۹۷) از تحلیل همبستگی متعارف برای ایجاد یک بردار وزنی واحد برای ورودی‌ها و خروجی‌ها که بین تمام DMUها مشترک است، استفاده کردند. Sinuany-Stern و Friedman (۱۹۹۸) یک تحلیل افتراقی غیرخطی برای تعیین وزن‌های مشترک DMUها ارائه کردند. Liu و Peng (۲۰۰۸) یک روش تحلیل وزن‌های مشترک (CWA) برای پیدا کردن مجموعه‌ی وزن‌های مشترک DMUها ابداع کردند. Hashimoto و Wu (۲۰۰۴) یک مدل DEA-CP (برنامه‌ریزی توافقی) پیشنهاد کردند که هدف آن پیدا کردن مجموعه‌ی وزن‌های مشترک DMUها از طریق ترکیب DEA و برنامه‌ریزی توافقی است. Kao و Hung (۲۰۰۵) نیز یک رویکرد حل توافقی مشابه را برای ایجاد وزن‌های مشترک در چارچوب DEA پیشنهاد کردند. Wang، Luo، و Liang (۲۰۰۹) پیشنهاد کردند که رتبه‌بندی DMUها از طریق تحمیل یک می‌توان وزنی کمینه انجام شود، که مجموعه‌ی مشترک وزنی برای DMUهای مورد مقایسه ایجاد می‌کند.

رویکردهای فوق یا بسیار پیچیده است و یا اینکه نمی‌تواند رتبه‌بندی کاملی از DMUها ارائه کند. ما در این مقاله روش جدیدی را بر اساس تحلیل رگرسیون برای پیدا کردن مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک برای رتبه‌بندی کامل DMUها ارائه می‌کنیم. روش جدید وزن‌های مشترک را از زاویه‌ی برازش کارایی تعیین می‌کند، و کارایی‌های DEAی محاسبه شده از مطلوب‌ترین وزن‌های DMUها را به عنوان کارایی‌های هدف در نظر می‌گیرد که باید DMUها به آن نایل شوند، و بهترین برازش آنها با کارایی‌های محاسبه شده از وزن‌های مشترک تعیین می‌شود. با کمینه‌سازی خطاهای برازش، وزن‌های مشترک به طور بهینه برآورد می‌شوند. دو مدل رگرسیون غیرخطی جدید از زوایای متفاوت برازش ایجاد می‌شوند تا وزن‌های مشترک برای رتبه‌بندی کامل DMUها به دست آید.

بقیه‌ی مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. قسمت ۲ به اختصار مدل CCR ایجاد شده توسط Charnes و همکاران (۱۹۷۸) را که با حروف اول نام آنها نامگذاری شده است، بررسی می‌کند، تا مبنایی را برای سنجش کارایی‌های هدف DMUها ارائه کند. قسمت ۳ روش جدید را ارائه می‌کند، و مدل‌های رگرسیونی جایگزین آن را برای برآورد بهینه‌ی وزن‌های مشترک مشخص می‌کند. مقایسه با یک رویکرد حل توافقی مشابه در قسمت ۴ انجام می‌شود. مثال‌های عددی در قسمت ۵ با استفاده از مدل‌های ایجاد شده بررسی می‌شوند تا قابلیت‌های افتراقی آنها آزموده شده و کاربرد بالقوه‌ی آنها در رتبه‌بندی کامل DMUها مشخص گردد. نتیجه‌گیری در قسمت ۶ بیان می‌شود.

۲- مدل CCR برای کارایی‌های هدف

n DMU را در نظر بگیرید که باید از نظر m ورودی و s خروجی بررسی شوند. فرض کنید x_{ij} $(i=1,\ldots,m)$ و y_{rj} $(r=1,\ldots,s)$ مقادیر ورودی و خروجی DMU_j $(j=1,\ldots,n)$ باشد، v_i $(i=1,\ldots,m)$ و u_r $(r=1,\ldots,s)$ وزن‌های ورودی و خروجی برای n DMU باشند، و θ_j کارایی DMU_j باشد که در معادله‌ی زیر تعریف شده است:

$$\theta_j = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \quad j=1,\ldots,n \tag{۱}$$

بنا به Charnes و همکاران (۱۹۷۸)، بهترین کارایی نسبی هر DMU را می‌توان با مدل CCR زیر اندازه‌گیری کرد که با حروف اول نام سه مؤلف نامگذاری شده است:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } \theta_0 = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} \\ &\text{s.t.} \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1 \\ &\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 \quad j=1,\ldots,n \\ &u_r \ge 0 \quad r=1,\ldots,s \\ &v_i \ge 0 \quad i=1,\ldots,m \end{aligned} \tag{۲}$$

که در اینجا DMU_0 به معنای DMUی مورد ارزیابی است، و v_i $(i=1,\ldots,m)$ و u_r $(r=1,\ldots,s)$ متغیرهای تصمیم هستند. اگر مقدار بهینه‌ی تابع هدف، θ_0^*، یک باشد، یعنی $\theta_0^*=1$، آنگاه به DMU_0 کارای DEA یا به اختصار کارا می‌گویند؛ در غیر این صورت، به آن غیر کارای DEA یا ناکارای DEA می‌گویند. کارایی‌های تعیین شده توسط مدل CCR، برای اینکه از کارایی‌های دیگر قابل افتراق باشند، معمولاً کارایی‌های CCR نامیده می‌شوند و ما در این مقاله آنها را به عنوان کارایی‌های هدف DMUها در نظر خواهیم گرفت. مدل CCR (۲) به ترتیب برای هر DMU حل می‌شود. در نتیجه، وزن‌های بهینه از یک DMU به DMUی دیگر متغیر خواهد بود و بیش از یک DMU به عنوان کارای DEA ارزیابی خواهد شد. چگونگی افتراق بین DMUهای کارای DEA یکی از موضوعات مهم پژوهشی بوده است و علاقه‌ی پژوهشی قابل توجهی را در مقالات DEA به سوی خود جلب کرده است. در قسمت بعد، دو مدل جدید را از زاویه‌ی برازش کارایی ایجاد می‌کنیم تا مجموعه‌ی مشترکی از وزن‌ها را به دست آوریم که می‌تواند بهترین برازش را با کارایی‌های هدف داشته باشد و رتبه‌بندی کاملی از DMUها را ایجاد کند، به طوری که بتوان آنها را بر یک مبنای یکسان ارزیابی، مقایسه، و رتبه‌بندی کامل کرد.

۳- مدل‌های جدید برای وزن‌های مشترک

فرض کنید θ_j^* ($j=1,\ldots,n$) کارایی‌های هدف n DMU و θ_j کارایی‌های محاسبه شده با معادله‌ی (۱) با استفاده از وزن‌های مشترک باشد. از زاویه‌ی تحلیل رگرسیون، θ_j تعریف شده بر اساس معادله‌ی (۱) به عنوان یک معادله‌ی رگرسیون غیرخطی دیده می‌شود. مطلوب‌تر این است که θ_j را بتوان به طور کامل با کارایی هدف θ_j^* انطباق داد. یعنی

$$\theta_j^* - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} = 0 \quad j=1,\ldots,n \tag{۳}$$

یا

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \theta_j^* \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} = 0 \quad j=1,\ldots,n \tag{۴}$$

با این حال، از آنجا که کارایی‌های هدف با مجموعه‌های متفاوت وزن‌های ورودی و خروجی تعیین می‌شود، تحت تأثیر غیرممکن است که بتوان آنها را با کارایی‌های محاسبه شده با وزن‌های مشترک به طور کامل برازش کرد، مگر آنکه فقط یک ورودی و یک خروجی وجود داشته باشد. به بیان دیگر، معادلات (۳) و (۴) فوق در موارد دارای ورودی متعدد و خروجی متعدد برقرار نیست. بسیار طبیعی است که انتظار می‌رود که دو کارایی متفاوت تا حد امکان به یکدیگر نزدیک باشند. این ما را قادر می‌سازد که دو مدل جدید برای برآورد وزن‌های مشترک n DMU ایجاد کنیم:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } Z = \sum_{j=1}^{n}\left(\theta_j^* - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}\right)^2 \\ &\text{s.t.} u_r \ge 0 \quad r=1,\ldots,s \\ &v_i \ge 0 \quad i=1,\ldots,m \end{aligned} \tag{۵}$$

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } J = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \theta_j^* \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}\right)^2 \\ &\text{s.t.} \sum_{r=1}^{s} u_r \left(\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\right) + \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = n \\ &u_r \ge 0 \quad r=1,\ldots,s \\ &v_i \ge 0 \quad i=1,\ldots,m \end{aligned} \tag{۶}$$

مدل (۵) یک برازش مستقیم کارایی‌های هدف است و وزن‌های مشترک با کمینه‌سازی خطاهای برازش بین دو کارایی مختلف به دست می‌آید. مدل (۶) یک برازش غیرمستقیم کارایی‌های هدف است و به یک قید نرمال‌سازی دیگر $\sum_{r=1}^{s} u_r (\sum_{j=1}^{n} y_{rj}) + \sum_{i=1}^{m} v_i (\sum_{j=1}^{n} x_{ij}) = n$ نیاز دارد تا از جواب پیش پا افتاده، یعنی $u_r = 0$ و $v_i = 0$ برای هر $r=1,\ldots,s$ و $i=1,\ldots,m$ اجتناب کند. دو مدل جدید هر دو حل می‌شوند تا وزن‌های مشترک دیگر برای رتبه‌بندی کامل DMUها به دست آید.

شایان ذکر است که مدل‌های (۵) و (۶) هر دو مدل‌های تحلیل رگرسیون مبتنی بر فاصله‌ی اقلیدسی هستند. گرچه جهت ایجاد مدل‌های رگرسیون برای تولید وزن‌های مشترک می‌توان از انواع دیگر فاصله مانند فاصله‌ی مانهاتان (Manhattan) (فاصله‌ی هنجار ۱) و فاصله‌ی چبیشف (Chebyshev) (فاصله‌ی هنجار بی‌نهایت) نیز می‌توان برای ایجاد مدل‌های تحلیل رگرسیون استفاده کرد، ولی تضمینی نیست که این مدل‌های مبتنی بر فاصله همیشه رتبه‌بندی کاملی از DMUها ایجاد کنند. علت این مسئله آن است

که این مدل‌ها را می‌توان به صورت برنامه‌ریزی آرمانی خطی برای حل ساده کرد و برنامه‌ریزی آرمانی خطی غالباً در نقطه‌ای که برخی از خطاهای برازش صفر هستند، به مقدار کمینه‌ی تابع هدف نایل می‌شود.

برای راحتی، ما به روشی که از مدل (۵) یا (۶) برای تولید مجموعه‌ی وزن‌های مشترک جهت رتبه‌بندی کامل DMUها استفاده می‌کند، روش تحلیل رگرسیون (RAM) می‌گوییم. مشاهده می‌شود که مدل (۵) معمولاً نمی‌تواند مجموعه‌ی یکتایی از وزن‌های مشترک را برای رتبه‌بندی کامل DMUها ایجاد کند، ولی این مهم نیست، زیرا کارایی‌های محاسبه شده از وزن‌های مشترک یکتا هستند. لذا رتبه‌بندی DMUها بر اساس مدل (۵) نیز یکتا است. در صورتی که وزن‌های مشترک تعیین شده بر اساس مدل (۵) نیز باید یکتا یا ثابت باشند، آنگاه می‌توانیم آنها را با معادلات زیر نرمال‌سازی کنیم تا عدم‌یکتایی از بین برود.

$$\hat{u}_r = \frac{nu_r}{\sum_{r=1}^{s} u_r\left(\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\right) + \sum_{i=1}^{m} v_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)} \quad r=1,\dots,s \tag{۷}$$

$$\hat{v}_i = \frac{nv_i}{\sum_{r=1}^{s} u_r\left(\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\right) + \sum_{i=1}^{m} v_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)} \quad i=1,\dots,m \tag{۸}$$

یک چنین روش نرمال‌سازی مسلماً تأثیری بر بهینگی مدل (۵) ندارد. پس از نرمال‌سازی، وزن‌های مشترک نرمال‌سازی شده در شرط $\sum_{r=1}^{s}\hat{u}_r(\sum_{j=1}^{n} y_{rj}) + \sum_{i=1}^{m}\hat{v}_i(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}) = n$ صدق می‌کنند و لذا قابل مقایسه با وزن‌های مشترک تعیین شده بر اساس مدل (۶) هستند.

٤- مقایسه با رویکرد جواب توافقی

ایده‌ی ترکیب DEA با برنامه‌ریزی توافقی نخستین بار توسط Hashimoto و Wu (۲۰۰۴) پیشنهاد شد. آنها یک مدل DEACP را برای تجمیع ترجیح در سیستم‌های رأی‌گیری پیشنهاد کردند که به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شد:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } D_p(Z(u)) = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(Z_j^* - \sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj}\right)^p\right]^{1/p} \\ &\text{s.t.} \sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj} \le 1 \quad j=1,\dots,n \\ &u_r - u_{r+1} \ge \varepsilon \quad r=1,\dots,t-1 \\ &u_t \ge \varepsilon \end{aligned} \tag{۹}$$

که در اینجا $\varepsilon > 0$ یک بی‌نهایت‌کوچک ناارشمیدسی است، $1 \le p \le +\infty$ یک پارامتر فاصله است، u_r ($r=1,\dots,t$) متغیرهای وزن هستند، y_{rj} رأیی است که نامزد j در جایگاه رتبه‌ی r دریافت می‌کند، و Z_j^* ($j=1,\dots,n$) نمرات کلی n نامزد (DMU) هستند که بر اساس مدل DEAی زیر تعیین شده است:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } Z_{j0} = \sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj0} \\ &\text{s.t.} \sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj} \le 1 \quad j=1,\dots,n \\ &u_r - u_{r+1} \ge \varepsilon \quad r=1,\dots,t-1 \\ &u_t \ge \varepsilon \end{aligned}$$

سه حالت خاص به ترتیب برای $p=1,2,+\infty$ بررسی شدند.

مشاهده شد که Kao و Hung (۲۰۰۵) نیز مدل بسیار مشابهی را عرضه کرده‌اند که به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\text{Minimize } D_p = \left[\sum_{j=1}^{n} (\theta_j^* - E_j)^p \right]^{1/p} \tag{۱۰}$$
$$\text{s.t.} E_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1 \quad j = 1, \ldots, n$$
$$u_r, v_i \ge \varepsilon > 0 \quad r = 1, \ldots, s; i = 1, \ldots, m$$

که در اینجا θ_j^* ($j = 1, \ldots, n$) کارایی‌های هدف DMU n هستند. Kao و Hung (۲۰۰۵) به وزن‌های مشترک و کارایی‌های مربوطه که با برنامه‌ی ریاضی فوق به دست می‌آید، حل توافقی با پارامتر p می‌گویند. به طور خاص، وقتی که $p = 2$ ، برنامه‌ی ریاضی (۱۱) فوق تبدیل می‌شود به

$$\text{Minimize } D_2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\theta_j^* - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \right)^2 \tag{۱۱}$$
$$\text{s.t.} \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 \quad j = 1, \ldots, n$$
$$u_r, v_i \ge \varepsilon > 0 \quad r = 1, \ldots, s; i = 1, \ldots, m$$

این مدل می‌تواند تعداد واحدهای کارای DEA را کاهش دهد، ولی هنوز هم بیش از یک واحد را به عنوان کارای DEA شناسایی می‌کند و نمی‌تواند رتبه‌بندی کاملی برای DMU n تولید کند.

یکی از مدل‌های پیشنهادی، مدل (۵)، شبیه مدل (۱۲) است ولی با آن تفاوت نیز دارد. تفاوت اصلی دو مدل در قیدهای $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0$ برای $j = 1, \ldots, n$ است، که علت تحمیل آن این است که کارایی‌های DMUها کمتر یا مساوی یک باشند. از دید ما این قیود مطلقاً ضروری نیستند، زیرا قبلاً در محاسبه‌ی کارایی‌های هدف DMU n در نظر گرفته شده‌اند. بنا بر این، مدل (۵) این قیدها را حذف می‌کند. معلوم می‌شود که این حذف اهمیت زیادی دارد، زیرا امکان آن را فراهم می‌کند که نه تنها کارایی‌های هدف برازش بیشتری با مدل (۵) داشته باشند، بلکه DMU n بدون نیاز به اطلاعات اضافی به طور کامل رتبه‌بندی شوند. این را در قسمت بعد با مثال‌های عددی آزمایش خواهیم کرد و نشان خواهیم داد.

۵- مثال‌های عددی

در این قسمت، دو مثال عددی با استفاده از روش‌های پیشنهادی جدید بررسی می‌شوند تا قابلیت افتراقی این روش‌ها آزموده شود و کاربرد بالقوه‌ی آنها در رتبه‌بندی کامل DMUها نشان داده شود.

مثال ۱: مثال عددی ارائه شده توسط Andersen و Petersen (۱۹۹۳) را که روش سوپرکارایی برای رتبه‌بندی DMUها را پیشنهاد کردند، در نظر بگیرید. در این مثال، پنج DMU دخالت دارند که دارای دو ورودی و یک خروجی مجازی هستند، که مقادیر آنها در جدول ۱ درج شده است. Banker و Chang (۲۰۰۶) نشان دادند که روش سوپرکارایی برای شناسایی برون‌هشته‌ها است، نه برای رتبه‌بندی. Wang و همکاران (۲۰۰۹) نشان دادند که رتبه‌بندی به دست آمده با روش سوپرکارایی با یک مجموعه‌ی وزن‌های مشترک قابل تحقق نیست.

برای ایجاد یک رتبه‌بندی کامل و قابل تحقق از پنج DMU، مدل‌های (۵) و (۶) را حل می‌کنیم تا دو مجموعه‌ی جایگزینی وزن‌های مشترک را به دست آوریم که در جدول ۲ نشان داده شده‌اند. برای مقایسه، وزن‌های مشترک به دست آمده توسط مدل (۱۱) Kao و Hung با $p = 1, 2, +\infty$ نیز در جدول ۲ نشان داده شده است، که بر این اساس، مشاهده می‌شود که مدل Kao و Hung، دو ورودی را با یک میزان اهمیت ارزیابی می‌کند، در حالی که مدل‌های پیشنهادی جدید ورودی ۲ را از نظر کارایی هدف

پنج DMU، مهم‌تر از ورودی ۱ ارزیابی می‌کنند. به طور خاص، وزن‌های مشترک به دست آمده از مدل (۵) را می‌توان به وسیله‌ی معادله‌های (۷) و (۸) برای ورودی ۱، ورودی ۲، و خروجی به ترتیب به صورت ۰.۰۳۶۹۷۲، ۰.۰۴۴۵۹۰، و ۰.۴۷۳۴۳۳ نرمال‌سازی کرد، که بسیار نزدیک به وزن‌های مشترک به دست آمده از مدل (۶) هستند، ایده‌آلی اهمیت بیشتری به ورودی ۲ می‌دهند.

کارایی‌های پنج DMU که با وزن‌های مشترک جدول ۲ محاسبه شده‌اند، در جدول ۳ نشان داده شده‌اند. به طوری که از این جدول مشاهده می‌شود، هر دو مدل (۵) و (۶) به طور موفق منجر به رتبه‌بندی کامل و یکسانی برای پنج DMU می‌شوند، یعنی $DMU_3 \succ DMU_2 \succ DMU_4 \succ DMU_1 \succ DMU_5$، که در اینجا نماد «$\succ$» یعنی اولی عملکردی بهتر از دومی دارد. اما مدل Kao و Hung تنها می‌تواند یک رتبه‌بندی نسبی نه کامل برای پنج DMU ارائه دهد.

جدول ۱: داده‌های ورودی و خروجی برای پنج DMU و کارایی هدف و سوپرکارایی آنها.

DMU	ورودی ۱	ورودی ۲	خروجی ۱	کارایی CCR	سوپرکارایی
۱	۲	۱۲	۱	۱	۱
۲	۲	۸	۱	۱	۱.۳۱۶
۳	۵	۵	۱	۱	۱.۲
۴	۱۰	۴	۱	۱	۱.۲۵
۵	۱۰	۶	۱	۰.۷۵	۰.۷۵

جدول ۲: وزن‌های مشترک در مثال ۱، به دست آمده از مدل‌های مختلف.

مدل	ورودی ۱	ورودی ۲	خروجی ۱
مدل (۵)	۰.۱۹۲۷۰۵	۰.۲۳۲۴۱۶	۲.۴۶۷۶۴۵
مدل (۶)	۰.۰۳۸۶۵۵	۰.۰۴۱۳۰۰	۰.۴۸۶۶۹۹
مدل *Kao* و *Hung* (۱۱)			
$p = 1$	۰.۱۲۴۱۲۸	۰.۱۲۴۱۲۸	۱.۲۴۱۲۸۴
$p = 2$	۰.۱۲۴۱۲۸	۰.۱۲۴۱۲۸	۱.۲۴۱۲۸۴
$p = +\infty$	۰.۵۶۱۹۳۸	۰.۵۶۱۹۳۸	۵.۶۱۹۳۷۵

جدول ۳: کارایی‌های پنج DMU، محاسبه شده با وزن‌های مشترک جدول ۲، و رتبه‌بندی‌های آنها.

DMU	مدل (۵)	مدل (۶)	مدل *Kao* و *Hung* (۱۱)		
			$p = 1$	$p = 2$	$p = +\infty$
۱	(۴) ۰.۷۷۷۴	(۴) ۰.۸۴۹۵	۰.۷۱۴۳	۰.۷۱۴۳	۰.۷۱۴۳
۲	(۲) ۱.۰۹۹۳	(۲) ۱.۱۹۳۷	۱	۱	۱
۳	(۱) ۱.۱۶۰۹	(۱) ۱.۲۱۷۴	۱	۱	۱
۴	(۳) ۰.۸۶۳۸	(۳) ۰.۸۸۲۱	۰.۷۱۴۳	۰.۷۱۴۳	۰.۷۱۴۳
۵	(۵) ۰.۷۴۲۹	(۵) ۰.۷۶۷۲	۰.۶۲۵۰	۰.۶۲۵۰	۰.۶۲۵۰

مثال ۲: شش خانه‌ی سالمندان (DMU) از نظر دو ورودی و دو خروجی که به صورت زیر تعریف شده‌اند، بررسی شدند:

- StHr (x_1): ساعات کار پرسنل در روز، شامل پرستاران، پزشکان، و غیره.
- Supp (x_2): امکانات مصرفی در روز، بر حسب هزار دلار.
- MCPD (y_2): تعداد کل روزهای بستری تحت پوشش خدمات بیمه‌ی مدیکر (Medicare) و مدیکید (Medicaid).
- PPPD (y_2): کل تعداد روزهای اقامت که هزینه‌ی آن به صورت خصوصی پرداخت شده است.

داده‌های ورودی و خروجی برای شش خانه‌ی سالمندان که از Sexton و همکاران (۱۹۸۶) گرفته شده است، همراه با کارایی‌های هدف شش خانه‌ی سالمندان در جدول ۴ ارائه شده است، که بر این اساس، دیده می‌شود که DEAی متعارف خانه‌های سالمندان A تا D را به عنوان کارای DEA شناسایی می‌کند و نمی‌تواند آنها را از هم افتراق دهد.

جدول ۴: داده‌های ورودی و خروجی برای شش خانه‌ی سالمندان و کارایی‌های هدف آنها.

خانه‌های سالمندان(DMUها)	ورودی‌ها		خروجی‌ها		کارایی CCR
	StHr	Supp	MCPD	PPPD	
A	۱۵۰	۰.۲	۱۴,۰۰۰	۳۵۰۰	۱
B	۴۰۰	۰.۷	۱۴,۰۰۰	۲۱,۰۰۰	۱
C	۳۲۰	۱.۲	۴۲,۰۰۰	۱۰,۵۰۰	۱
D	۵۲۰	۲.۰	۲۸,۰۰۰	۴۲,۰۰۰	۱
E	۳۵۰	۱.۲	۱۹,۰۰۰	۲۵,۰۰۰	۰.۹۷۷۵
F	۳۲۰	۰.۷	۱۴,۰۰۰	۱۵,۰۰۰	۰.۸۶۷۵

جدول ۵: وزن‌های مشترک در مثال ۲، به دست آمده از مدل‌های مختلف.

مدل	StHr	Supp	MCPD	PPPD
مدل (۵)	0.009684	2.948961	0.000101	0.000201
مدل (۶)	0.000680	0.271169	8.87E06	1.55E05
مدل *Kao* و *Hung* (۱۱)				
$p = 1$	0.000665	0.310285	6.97E06	1.84E05
$p = 2$	0.010960	3.325308	0.000110	0.000221
$p = +\infty$	7.50E06	0.002297	7.51E08	1.52E07

جدول ۶: کارایی‌های شش خانه‌ی سالمندان محاسبه شده با وزن‌های مشترک جدول ۵ و رتبه‌بندی‌های آنها.

خانه‌ی سالمندان	مدل (۵)	مدل (۶)	مدل *Kao* و *Hung* (۱۱)		
			$p = 1$	$p = 2$	$p = +\infty$
A	(۱) ۱.۰۳۸۲	(۱) ۱.۱۴۱۹	۱	۱	۱
B	(۵) ۰.۹۴۹۰	(۵) ۰.۹۷۳۰	۱	۰.۹۲۰۰	۰.۹۲۱۷
C	(۴) ۰.۹۵۸۴	(۴) ۰.۹۸۵۵	۰.۸۲۹۵	۰.۹۲۳۹	۰.۹۲۱۷
D	(۲) ۱.۰۳۰۸	(۲) ۱.۰۰۳۰	۱	۱	۱
E	(۳) ۱.۰۰۲۴	(۳) ۰.۹۸۶۲	۰.۹۷۷۵	۰.۹۷۲۰	۰.۹۷۲۱
F	(۶) ۰.۸۵۸۰	(۶) ۰.۸۷۴۹	۰.۸۶۷۵	۰.۸۳۱۱	۰.۸۳۱۹

برای این مثال، ما مدل‌های (۵) و (۶) و مدل (۱۱) Kao و Hung را به ترتیب حل می‌کنیم تا پنج مجموعه‌ی جایگزین وزن مشترک به دست آوریم که در جدول ۵ نشان داده شده‌اند. کارایی‌های متناظر محاسبه شده از این وزن‌های مشترک جایگزین در جدول ۶ داده شده است، که به طوری که دیده می‌شود، وزن‌های مشترک حاصل از مدل (۵) و (۶) رتبه‌بندی کاملی از شش خانه‌ی سالمندان ارائه می‌کنند، در حالی که رویکرد حل توافقی Kao و Hung صرف نظر از پارامتر فاصله‌ی انتخاب شده، تنها یک رتبه‌بندی نسبی از شش خانه‌ی سالمندان به دست می‌دهد. این نشان دهنده‌ی مزیت مدل‌های جدید پیشنهادی نسبت به رویکرد جواب توافقی است.

همچنین، مشاهده می‌شود که خانه‌ی سالمندان غیر کارای DEAی E رتبه‌بندی بالاتری نسبت به خانه‌های سالمندان کارای DEAی B و C به دست آورده است. این آرم بر اساس تحقیقات قبلی معنی‌دار است (Friedman و Sinuany-Stern، ۱۹۹۷؛ Liu و Peng، ۲۰۰۸؛ Sinuany-Stern و Friedman، ۱۹۹۸). وقتی که وزن‌های ورودی و خروجی را نمی‌توان به طور آزادانه

انتخاب کرد، برخی از واحدهای کارای DEA دیگر کارای DEA نخواهند بود و ضرایب پایین‌تری نسبت به واحدهای غیر کارای DEA به دست می‌آورند.

۶- نتیجه‌گیری

فقدان قدرت افتراق عیب مهمی در DEA است و علاقه‌ی تحقیقاتی زیادی را در مقالات DEA بر انگیخته است. ما در این مقاله، دو مدل جدید را با استفاده از تکنیک‌های تحلیل رگرسیون ایجاد کردیم که وزن‌های مشترک جایگزین را برای رتبه‌بندی کامل DMUها تولید می‌کنند. دو مدل جدید از کارایی‌های DEAی محاسبه شده با مطلوب‌ترین وزن‌های هر DMU به عنوان آرمان DMUها استفاده می‌کنند و کارایی‌های محاسبه شده با وزن‌های مشترک را با آنها برازش می‌کنند. ثابت شده است که دو مدل جدید هر دو می‌توانند وزن‌های مشترکی ایجاد کنند که کاملاً با کارایی‌های DEA در حالت خاص ورودی منفرد و خروجی منفرد برازش دارند. در حالت دارای ورودی متعدد و خروجی متعدد، دو مدل جدید وزن‌های مشترکی ایجاد می‌کنند که بهترین برازش را با کارایی‌های DEA دارند. دو مثال عددی با استفاده از مدل‌های ابداع شده بررسی شدند تا قابلیت آنها را در افتراق DMUها نشان دهند. همه‌ی DMUها در دو مثال عددی، صرف نظر از اینکه تعداد آنها چقدر باشد، با موفقیت افتراق داده شده و رتبه‌بندی کامل شدند. این نشان دهنده‌ی قدرت مدل‌های جدید پیشنهادی در افتراق DMUها، خصوصاً واحدهای کارای DEA، است.

۷- منابع

Anderson, T. R., Hollingsworth, K., & Inman, L. (2002). The fixed weighting nature of a cross-evaluation model. *Journal of Productivity Analysis, 17*, 249–255.

Andersen, P., & Petersen, N. C. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science, 39*, 1261–1264.

Banker, R. D., & Chang, H. (2006). The super-efficiency procedure for outlier identification, not for ranking efficient units. *European Journal of Operational Research, 175*(2), 1311–1320.

Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research, 2*, 429–444.

Doyle, J. R., & Green, R. H. (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses. *Journal of the Operational Research Society, 45*, 567–578.

Friedman, L., & Sinuany-Stern, Z. (1997). Scaling units via the canonical correlation analysis in the DEA context. *European Journal of Operational Research, 100*(3), 629–637.

Ganley, J. A., & Cubbin, S. A. (1992). *Public sector efficiency measurement: Applications of data envelopment analysis*. Amsterdam: North-Holland.

Hashimoto, A., & Wu, D. A. (2004). A DEA-compromise programming model for comprehensive ranking. *Journal of the Operations Research Society of Japan, 47*(2), 73–81.

Kao, C., & Hung, H. T. (2005). Data envelopment analysis with common weights: The compromise solution approach. *Journal of the Operational Research Society, 56*, 1196–1203.

Liu, F. H. F., & Peng, H. H. (2008). Ranking of units on the DEA frontier with common weights. *Computers and Operations Research, 35*(5), 1624–1637.

Roll, Y., Cook, W. D., & Golany, B. (1991). Controlling factor weights in data envelopment analysis. *IIE Transactions, 23*, 2–9.

Roll, Y., & Golany, B. (1993). Alternate methods of treating factor weights in DEA. *Omega, 21*, 99–109.

Saaty, T. L. (1980). *The analytic hierarchy process*. New York: McGraw-Hill.

Sexton, T. R., Silkman, R. H., & Hogan, A. J. (1986). Data envelopment analysis: Critique and extensions. In R. H. Silkman (Ed.), *Measuring efficiency: An assessment of data envelopment analysis* (pp. 73–105). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Shang, J., & Sueyoshi, T. (1995). A unified framework for the selection of flexible manufacturing system. *European Journal of Operational Research, 85*, 297–315.

Sinuany-Stern, Z., Mehrez, A., & Barboy, A. (1994). Academic departments' efficiency in DEA. *Computers and Operations Research, 21*(5), 543–556.

Sinuany-Stern, Z., & Friedman, L. (1998). DEA and the discriminant analysis of ratios for ranking units. *European Journal of Operational Research, 111*(3), 470–478.

Wang, Y. M., Luo, Y., & Liang, L. (2009). Ranking decision making units by imposing a minimum weight restriction in the data envelopment analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 223*(1), 469–484.

13 th International Conference on Industrial Engineering, Productivity and Quality
Event Place: Tbilisi,Georgia
www.ipqconf.ir
سیزدهمین کنفرانس بین المللی
مهندسی صنایع ، بهره وری و کیفیت | گرجستان
13 th International Conference on Industrial Engineering, Productivity and Quality
PUBLISH IN JOURNALS
۳۱ شهریور ماه ۱۴۰۳

Common weights for complete ranking of decision-making units using regression analysis

Hojjat Esbati*
Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Hossein Azizi
Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Shahruz Fathi Ajirlu
Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Abstract

Existing methods for generating common weights in Data Envelopment Analysis (DEA) are either very complex or unable to provide a complete ranking of Decision Making Units (DMUs). This article presents a new approach based on regression analysis to obtain a set of common weights that is easy to estimate and can provide a complete ranking of DMUs. The efficiencies of DMUs obtained with the most desirable weights are considered as the target efficiencies of DMUs, and their best fit with the efficiencies resulting from common weights is calculated.

Keywords: Data envelopment analysis, Regression analysis, Common weights, Target efficiency, ranking.

* Corresponding Author