



## تفکیک اثر تولید خروجی‌های نامطلوب از ناکارایی‌های تولید خروجی‌های مطلوب در اندازه‌گیری کارایی

### فتح‌اله پرباز

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

### حسین عزیزی

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

### شهرزاد فتحی‌اجیرلو

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

### چکیده

خروجی‌های نامطلوب، محصولات فرعی تولید خروجی‌های مطلوب هستند که بر طبق ادعای دسترس‌پذیری ضعیف، فقط می‌توانند متناسب با خروجی‌های مطلوب، کاهش یابند. این مقاله، مدلی را برای تعیین کمترین سطح خروجی‌های نامطلوبی ارائه می‌دهد که در تولید خروجی‌های مطلوب یک واحد تولید تحت دسترس‌پذیری ضعیف، نمی‌توان از آنها اجتناب کرد. تفاضل کارایی واحد تولید و واحد فرضی مربوطه که کمترین سطح را برای خروجی‌های نامطلوب ایجاد می‌کند، یک اندازه از تأثیر تولید مقدار بیش از حد خروجی‌های نامطلوب در کارایی است. مدل پیشنهادی، قادر به تفکیک اثر تولید خروجی‌های نامطلوب از ناکارایی تولید خروجی‌های مطلوب در اندازه‌گیری کارایی یک واحد تولید است.

**واژگان کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، خروجی نامطلوب، دسترس‌پذیری ضعیف، کارایی.



## ۱- مقدمه

در زمان تولید خروجی در یک فرایند تولید، تعدادی خروجی نامطلوب مانند فاضلاب و آلاینده‌ها نیز اغلب به طور همزمان تولید می‌شوند. خروجی‌های نامطلوب، محصولات فرعی تولید خروجی‌های مطلوب هستند که نمی‌توان آنها را به طور کامل دفع کرد. با این حال برای محیط زیست و سلامت انسان مضر هستند و باید به کمترین سطح، کاهش یابند. در پژوهش‌های منتشر شده، روش‌های متعددی برای اندازه‌گیری کارایی و محاسبه سطح هدف خروجی‌های نامطلوب یک واحد تولیدی، تحت چارچوب تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) ارائه شده است. شیل (۲۰۰۱)، ژو و همکاران (۲۰۰۸)، کائو (۲۰۱۷)، سانگ و همکاران (۲۰۱۲) و داکپو و همکاران (۲۰۱۶)، طبقه‌بندی‌ها و بحث‌های متفاوتی از این روش‌ها داشتند. از میان طبقه‌بندی‌های مختلف، مفهوم دسترس‌پذیری ضعیف، هم تحت بازده به مقیاس ثابت (فیر و همکاران، ۱۹۸۹) و هم تحت بازده به مقیاس متغیر (فیر و گراسکوف، ۲۰۰۳) یک دسته اصلی از روش‌ها را تشکیل می‌دهد. برخلاف دسترس‌پذیری قوی که فرض می‌کند خروجی‌های نامطلوب می‌توانند آزادانه (بدون قید و شرط) دفع شوند، دسترسی‌پذیری ضعیف بیان می‌دارد که خروجی‌های نامطلوب را فقط می‌توان به همان نسبت خروجی‌های مطلوب کاهش داد، زیرا خروجی‌های نامطلوب، محصولات فرعی در تولید خروجی‌های مطلوب هستند. چارلز و همکاران (۲۰۱۲) از این مفهوم در اندازه‌گیری کارایی بردهای مدار چاپی مونتاژ شده تحت بازده به مقیاس ثابت، استفاده کردند. کائو و هوانگ (۲۰۲۱) کمترین مقدار خروجی‌های نامطلوبی را محاسبه کردند که در تولید خروجی‌های مطلوب تحت بازده به مقیاس متغیر، قابل‌اجتناب نبودند و اثر تولید مقدار بیش از حد خروجی‌های نامطلوب بر کارایی یک واحد تولیدی را اندازه‌گیری کردند. دسترس‌پذیری ضعیف فرض می‌کند که خروجی‌های نامطلوب، به همان نسبت خروجی‌های مطلوب کاهش می‌یابند. از لحاظ نظری، نسبت کاهش خروجی‌های نامطلوب در زمان اندازه‌گیری کارایی یک واحد تولیدی، می‌تواند برای تمام آن واحدهای تولیدی، یکسان (نسبت مشترک) یا متفاوت (نسبت انفرادی) باشد. در هر دو حالت، نسبت‌های به دست‌آمده برای واحد تولیدی ارزیابی شده، پس از محاسبه کارایی هر واحد تولیدی، به طور کلی، متفاوت است. اولین مدل دسترس‌پذیری ضعیف با نسبت مشترک در فیر و همکاران (۱۹۸۹)، توسعه یافته است. فیر و همکاران (۲۰۱۳، ۲۰۱۴) از ایده فیر و همکاران (۱۹۸۹) به منظور محاسبه خروجی مطلوب ماکسیمال برای تمام واحدهای تولیدی استفاده کردند که در صورت تخصیص بهینه خروجی‌های نامطلوب در بین واحدهای تولیدی، می‌توان آن را تولید کرد. بال و همکاران (۱۹۹۴) براساس همین ایده، چهار مدل را به منظور به دست آوردن کشش‌های سایه‌ای برای خروجی‌های نامطلوب ساختند. مفهوم دسترس‌پذیری ضعیف با نسبت مشترک برای محاسبه قیمت‌های سایه با استفاده از رویکردهای پارامتریک نیز استفاده شده (فیر و همکاران، ۱۹۹۳؛ واردانیان و نوه، ۲۰۰۶) است. قیمت‌های سایه خروجی‌های نامطلوب برای هر واحد تولیدی، قابل‌محاسبه است. کوسمانن (۲۰۰۵) اولین مدل دسترس‌پذیری ضعیف با نسبت انفرادی را برای اندازه‌گیری کارایی پیشنهاد کرد. کوسمانن و پودینوفسکی (۲۰۰۹) ثابت کردند که یک نسبت مشترک در تمام واحدهای تولیدی برای نشان دادن دقیق یک فناوری محدب، ناکافی است در حالی که نسبت‌های انفرادی این کار را انجام می‌دهند. لی (۲۰۱۵)، سلیم و همکاران (۲۰۱۷) و شن و همکاران (۲۰۲۲)، از ایده دسترس‌پذیری ضعیف با نسبت انفرادی برای اندازه‌گیری عملکرد انواع مختلف واحدهای تولیدی در حضور خروجی‌های نامطلوب، استفاده کردند. کوئلی و همکاران (۲۰۰۷) براساس مفهوم معادله تعادل مواد که میزان انتشار آلودگی را به عنوان تفاوت بین ورودی کل و خروجی کل تعریف می‌کند، مدلی را برای اندازه‌گیری کارایی زیست‌محیطی یک شرکت توسعه دادند که می‌تواند به مولفه‌های فنی و تخصیصی تجزیه شود. زمانی که دو یا چند آلاینده در نظر گرفته می‌شوند، اطلاعات قیمت آلاینده‌ها برای تجمیع انواع آلودگی، اعمال می‌شود. مدل‌های دسترس‌پذیری ضعیف با معادله تعادل مواد، ناسازگار هستند و در حالت تعادل مواد، یک رویکرد شدنی نیستند. با این حال، رویکرد تعادل مواد، قادر به یافتن کمترین سطوح خروجی‌های نامطلوبی نیست که در تولید خروجی‌های مطلوب نمی‌توان از آنها اجتناب کرد و در مطالعه ما، مورد نیاز هستند.

مورتی و همکاران (۲۰۱۲) یک رویکرد تولید فرعی را براساس فرض تشکیل فناوری تولید از دو فناوری مستقل تولید موردانتظار (موردنظر) و تولید باقیمانده پیشنهاد دادند که فناوری اول، نحوه تبدیل ورودی به خروجی‌های موردانتظار در تولید را توصیف می‌کند و فناوری دوم، مکانیسم تولید باقیمانده ماهیت (طبیعت) را منعکس می‌کند که یک رابطه میان خروجی‌های نامطلوب و ورودی‌هایی است



که خروجی‌های نامطلوب را تولید می‌کنند. کارایی کلی به عنوان میانگین کارایی تولید خروجی‌های مطلوب و کارایی تولید خروجی‌های نامطلوب تعریف می‌شود. تفاوت عمده بین رویکرد تولید فرعی و رویکرد دسترس‌پذیری ضعیف در این است که رویکرد اول برای توصیف تولید خروجی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب، از دو فناوری مستقل استفاده می‌کند در صورتی که رویکرد دوم، تولید خروجی‌های مطلوب و نامطلوب را در یک فناوری، ترکیب می‌کند.

در فیر و همکاران (۱۹۸۹)، یک مدل هذلولی برای اندازه‌گیری کارایی خروجی یک مجموعه از واحدهای تولیدی با خروجی‌های نامطلوب، توسعه داده شد. دو شکل از مدل، فرموله شدند که یکی خروجی‌های نامطلوب را در نظر می‌گیرد و دیگری، آنها را نادیده می‌گیرد. این مقاله، بیان می‌دارد که مقایسه این دو مدل، نشان می‌دهد که نادیده گرفتن خروجی‌های نامطلوب، تا چه اندازه، موجب تحریف بزرگی و حتی رتبه‌بندی دو اندازه عملکرد می‌شود. با این حال، نحوه تاثیر خروجی‌های نامطلوب بر کارایی و نحوه تفکیک اثر تولید خروجی‌های نامطلوب از ناکارایی تولید خروجی‌های مطلوب، مورد بحث قرار نگرفت.

در این مقاله، مدلی را برای محاسبه کمترین سطح خروجی‌های نامطلوب پیشنهاد می‌کنیم که در تولید خروجی‌های مطلوب یک واحد تولیدی با سطح مفروض از ورودی‌ها تحت دو شکل دسترس‌پذیری ضعیف، نمی‌توان از آنها اجتناب کرد. کارایی واحد تولیدی نظری با کمترین سطح خروجی‌های نامطلوب، نشان‌دهنده کارایی تولید خروجی‌های مطلوب است. تفاوت بین کارایی محاسبه‌شده از کمترین سطح و سطح فعلی خروجی‌های نامطلوب، تاثیر تولید مقدار بیش از حد خروجی‌های نامطلوب را بر کارایی نشان می‌دهد. در این حالت، رابطه بین (نا) کارایی یک واحد تولیدی، (نا) کارایی تولید خروجی‌های مطلوب و تاثیر تولید مقدار بیش از حد خروجی‌های نامطلوب، مورد بحث قرار می‌گیرد.

پیشگر-گمله و همکاران (۲۰۲۰) با توجه به اندازه‌گیری کارایی در حضور خروجی‌های نامطلوب، شش مدل DEA را در اندازه‌گیری کارایی ۱۳۶ مزرعه در لهستان مقایسه کردند که شامل نادیده گرفتن خروجی‌های نامطلوب، در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب به‌عنوان ورودی، تبدیل داده‌ها، نرخ تاثیر، مدل نسبت و روش اندازه مبتنی بر اسلک (SBM) بود و به این نتیجه رسیدند که روش SBM از لحاظ تمایز عملکرد شرکت‌ها و شناسایی بهبودهای صورت‌گرفته، نتایج بهتری را ارائه داده است. بنابراین در این مطالعه، از کارایی SBM برای محاسبه کارایی، استفاده شده است. مقایسه مدل‌های نسبت مشترک و انفرادی نیز از دیدگاه نظری و تجربی انجام شده است.

در مقایسه با مطالعه کائو و هوانگ (۲۰۲۱)، دو تفاوت عمده وجود دارد. تفاوت اول در این است که کائو و هوانگ (۲۰۲۱) فرض کردند که خروجی‌های نامطلوب تولیدشده در فرآیند تولید، فقط به خروجی‌های مطلوب تولیدشده بستگی دارند و مستقل از ورودی‌های مصرفی هستند. بدیهی است که فرض مستقل بودن خروجی‌های نامطلوب از ورودی‌ها، نامتناسب است. در این مطالعه، ورودی‌ها را در زمان محاسبه کمترین سطوح خروجی‌های نامطلوبی در نظر می‌گیریم که در تولید سطوح مفروض از خروجی‌های مطلوب، نمی‌توان از آنها اجتناب کرد. تفاوت دوم این است که کائو و هوانگ (۲۰۲۱)، مفهوم نسبت مشترک را برای مدل دسترس‌پذیری ضعیف به کار بردند که نیازمند این است که تمام واحدهای تولیدی در زمان محاسبه کارایی یک واحد تولیدی، نسبت یکسانی در کاهش خروجی‌های نامطلوب با خروجی‌های مطلوب داشته باشند. این امر، نسبتاً محدودکننده است. این مطالعه، از مفهوم کلی‌تر نسبت انفرادی استفاده می‌کند که برای هر واحد تولیدی این امکان را فراهم می‌کند که نسبت خود را در کاهش خروجی‌های نامطلوب داشته باشد. نتایج به‌دست‌آمده، قابل اعتمادتر و کلی‌تر هستند. در بخش بعدی، مدلی را برای محاسبه کمترین سطح خروجی‌های نامطلوبی توسعه می‌دهیم که مجاز به تولید تحت دو شکل دسترس‌پذیری ضعیف هستند. سپس، در بخش ۳، اثر تولید مقدار بیش از حد خروجی‌های نامطلوب را اندازه‌گیری می‌کنیم. برای اهداف تشریحی (گویا)، در بخش ۴، از حالت موردبحث در کائو و هوانگ (۲۰۲۱) برای مقایسه نتایج به‌دست‌آمده از مدل‌های نسبت مشترک و انفرادی استفاده می‌کنیم. در نهایت، در بخش ۵، تعدادی از نتایج براساس بحث‌ها در بخش‌های قبل استخراج شده‌اند.

## ۲- کمترین سطح خروجی‌های نامطلوب

یک حالت کلی از  $n$  واحد تصمیم‌گیری (DMU) را در نظر بگیرید که از  $m$  ورودی برای تولید  $s$  خروجی (مطلوب) استفاده می‌کنند. در زمان تولید خروجی‌های مطلوب، هم‌زمان  $h$  خروجی نامطلوب نیز تولید می‌شود. فرض کنید  $X_{ij}$ ،  $Y_{rj}$  و  $U_{fj}$  به ترتیب مقادیر ورودی  $i, i = 1, \dots, m$  و خروجی مطلوب  $r, r = 1, \dots, s$  و خروجی نامطلوب  $f, f = 1, \dots, h$  از  $j$  DMU را نشان دهند. خروجی‌های نامطلوب، محصولات فرعی در تولید خروجی‌های مطلوب هستند و نمی‌توان آنها را آزادانه دفع کرد و فقط می‌توان با کاهش متناسب خروجی‌های مطلوب تحت فرض دسترس‌پذیری ضعیف، کاهش داد. برای تعیین کمترین سطح خروجی‌های نامطلوب، دو شکل از دسترس‌پذیری ضعیف یعنی نسبت مشترک و نسبت انفرادی وجود دارد که در تولید خروجی‌های مطلوب نمی‌توان از آنها اجتناب کرد.

را نشان می‌دهیم. مجموعه امکان تولید (PPS) ایجاد شده تحت دسترس‌پذیری ضعیف تعریف شده در فیر و گراسکوف (۲۰۰۳) برای حالت‌های بازده به مقیاس متغیر برابر با

$$T^{LP} = \{(x, y, u) \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{ij} \leq x_i, i = 1, \dots, m$$

$$\text{و}$$

$$\tau \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_{rj} \geq r = 1, \dots, s, \tau \sum_{j=1}^n \lambda_j U_{fj} = u_f, f = 1, \dots, h, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, 0 \leq \tau \leq 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

است که  $\tau$  در آن، نسبت کاهش در خروجی‌های مطلوب و نامطلوب است که در تمام DMUها، مشترک است. عبارت غیرخطی  $\tau \lambda_j$  را می‌توان با جایگزینی آن با  $\mu_j$  خطی کرد. بیشترین مقدار خروجی نامطلوب را براساس این PPS با نسبت مشترک، می‌توان با  $DMU^k$  کاهش داد،  $S_f^U$  از طریق مدل نوع جمعی زیر محاسبه می‌شود (چارنز و همکاران، ۱۹۸۵):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{f=1}^h S_f^U \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \mu_j X_{ij} \leq \tau X_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j Y_{rj} \geq Y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j U_{fj} + S_f^U = U_{fk}, \quad f = 1, \dots, h \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j = 1 \\ & 0 \leq \tau \leq 1 \\ & \mu_j, S_f^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, f = 1, \dots, h. \end{aligned} \quad (1)$$

مدل‌های جمعی معمولاً دارای چندین جواب برای  $S_f^U$  هستند. به علاوه، از منظر اینکه عوامل اندازه‌گیری شده در واحدهای کوچک‌تر، مقادیر بیشتری دارند، تغییرناپذیر واحد نیستند. به عنوان مثال، عاملی که برحسب فوت بیان می‌شود، در مقایسه با مایل، مقادیر بیشتری برای  $S_f^U$  دارد. روش مرسوم برای حذف اثر واحد اندازه‌گیری بر متغیرهای اسلک، شامل تقسیم متغیرهای اسلک بر مشاهدات مربوطه یعنی استفاده از  $1/U_{fk}$  به عنوان وزن در جستجوی مقادیر بهینه برای  $S_f^U$  است. با توجه به اینکه مشاهدات بزرگ‌تر، معمولاً دارای

اسلک بیشتری هستند، با به کار بردن  $1/U_{fk}$  به عنوان وزن، یک اندازه نسبی از مقدار اسلک به دست می‌آید. روش دیگری که در تحقیقات برای یافتن مقادیر اسلک بهینه استفاده شده است، اولویت دادن به عوامل است. فرض کنید  $f$  امین خروجی نامطلوب، اولویت پنجم را دارد. این روش، ابتدا  $s_1^U$  را تحت همان محدودیت مدل (۱) به حداکثر می‌رساند. پس از به دست آمدن مقدار بهینه  $s_1^{U*}$ ،  $s_2^U$  را تحت همان محدودیت مدل (۱) به اضافه یک محدودیت اضافی  $s_1^U = s_1^{U*}$  حداکثر می‌سازد. در مرحله بعد،  $s_3^U$  را با همان محدودیت مدل قبلی به اضافه یک محدودیت اضافی  $s_2^U = s_2^{U*}$  حداکثر می‌سازد. این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که تمام متغیرهای اسلک  $s_f^U$  حل شوند. روش‌های مختلف منجر به  $s_f^{U*}$  های مختلف می‌شوند. کارایی‌هایی محاسبه شده بعدی نیز متفاوت خواهد بود. هر محقق باید از روشی استفاده کند که برای مطالعات وی، مناسب‌ترین روش باشد. لازم به ذکر است که هر روش، در زمانی که فقط یک خروجی نامطلوب وجود دارد، نتیجه یکسانی را ایجاد می‌کند. در این مطالعه، از روش اول استفاده می‌کنیم.

نکته دیگر مورد اشاره در مدل (۱) این است که در زمانی که  $\tau$  به کران بالای خود یعنی ۱ برسد، ناحیه شدنی، بزرگ‌ترین مقدار خود را دارد. تعیین  $\tau = 1$  تضمین می‌کند که جواب بهینه در ناحیه شدنی، نگه‌داشته می‌شود. مدل (۱) با در نظر گرفتن این موارد، به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{f=1}^h s_f^U / U_{fk} \\ & \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \mu_j X_{ij} \leq X_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j Y_{rj} \geq Y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j U_{fj} + s_f^U = U_{fk}, \quad f = 1, \dots, h \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j = 1 \quad j = 1, \dots, n, f = 1, \dots, h. \\ & \mu_j, s_f^U \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

فرض کنید  $s_f^{U^*}$  جواب بهینه باشد. کمترین مقدار خروجی نامطلوب  $f$  که توسط  $DMU^k$  در تولید خروجی‌های مطلوب، قابل اجتناب نیست برابر با  $U_{fk}^o = U_{fk} - s_f^{U^*}$  است. توجه کنید که  $\max \sum_{f=1}^h s_f^U / U_{fk}$  معادل با  $\min h - \sum_{f=1}^h s_f^U / U_{fk} = h \times \left[ \frac{1}{h} \sum_{f=1}^h (1 - s_f^{U^*} / U_{fk}) \right]$  است که برابر با ضرب در میانگین کارایی خروجی نامطلوب است. با کم کردن مقدار هدف مدل (۲) از  $h$  و تقسیم نتیجه حاصل بر  $h$ ، کارایی خروجی نامطلوب به دست می‌آید.

کائو و هوانگ (۲۰۲۱) مدل مشابهی را با حذف مجموعه اول و محدودیت چهارم پیشنهاد کردند. حذف اولین مجموعه از محدودیت‌ها با این فرض همراه است که تولید خروجی‌های نامطلوب، مستقل از ورودی‌های مصرفی است. این امر فقط در زمانی قابل توجیه است که تمام  $DMU$ ها، مقدار ورودی‌های یکسانی داشته باشند. محدودیت چهارم مربوط به بازده به مقیاس‌ها است. حذف این محدودیت نشان می‌دهد که بازده به مقیاس، مقدار ثابتی در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، بازده به مقیاس‌ها در مراحل بعدی محاسبه کارایی نیز باید ثابت در نظر گرفته شوند تا سازگار باشند. با این حال، در کائو و هوانگ (۲۰۲۱)، مقدار بازده به مقیاس در محاسبه بعدی کارایی، متغیر در نظر گرفته شد که ناسازگار است.

فرض کنید هر  $DMU^j$  یک معادل فرضی  $DMU$  دارد که با  $k^0$  نشان داده می‌شود، که از مقدار ورودی‌های یکسان  $X_{ij}$  برای تولید مقدار خروجی‌های مطلوب یکسان  $Y_{rj}$  استفاده می‌کند. مقدار خروجی‌های نامطلوب تولیدی به جای اینکه برابر با  $U_{fj}$  باشد، برابر با کمترین مقدار  $U_{fj}^0$  است. یعنی  $DMU^{k^0}$  دارای مشاهده  $(X_{ik}, Y_{rk}, U_{fk}^0)$  است هر  $DMU$  با ورودی‌های  $X_{ik}$  و خروجی‌های مطلوب  $Y_{rk}$  منجر به تولید خروجی‌های نامطلوب  $U_{fk}$  خواهد شد که تحت فرض دسترس‌پذیری ضعیف با نسبت مشترک، بزرگ‌تر یا مساوی با  $U_{fk}^0$  هستند.

در بحث بالا، ضریب کاهش  $\tau$  برای تمام  $DMU$ ها، یکسان فرض شده است. کوسمانن (۲۰۰۵) این فرض را تسهیل کرد تا این امکان را برای هر  $DMU$  فراهم کند که ضریب  $\tau_j$  خود را داشته باشند و  $PPS$  را تحت دسترس‌پذیری ضعیف با نسبت انفرادی به صورت زیر تعریف کرد:

$$T^{IP} = \{(x, y, u) \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{ij} \leq x_i, i = 1, \dots, m, \sum_{j=1}^n \tau_j \lambda_j Y_{rj} \geq y_r, r = 1, \dots, s, \sum_{j=1}^n \tau_j \lambda_j U_{fj} = u_f, f = 1, \dots, h, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, 0 \leq \tau_j \leq 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}.$$

کوسمانن (۲۰۰۵) با تعیین  $\tau_j \lambda_j = \mu_j$  و  $(1 - \tau_j) \lambda_j = \theta_j$  توانست معادلات غیرخطی در  $T^{IP}$  را به معادلات خطی تبدیل کند.

بر طبق مدل (۲) و براساس  $T^{IP}$  می‌توان بیشترین مقدار خروجی‌های نامطلوب قابل کاهش را از طریق مدل زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{f=1}^h s_f^U / U_{fk} \\ & \text{s.t. } \sum_{j=1}^n (\mu_j + \theta_j) X_{ij} \leq X_{ik}, i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j Y_{rj} \geq Y_{rk}, r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j U_{fj} + s_f^U = U_{fk}, f = 1, \dots, h \\ & \sum_{j=1}^n (\mu_j + \theta_j) = 1 \\ & \mu_j, \theta_j, s_f^U \geq 0, j = 1, \dots, n, f = 1, \dots, h. \end{aligned} \quad (3)$$

با نشان دادن  $s_f^{U*}$  به عنوان جواب بهینه، کمترین سطح خروجی‌های نامطلوبی که نمی‌توان از آنها در تولید خروجی‌های مطلوب تحت دسترس‌پذیری ضعیف با نسبت انفرادی، اجتناب کرد، برابر با  $U_{fk}^* = U_{fk} - s_f^{U*}$  است. فرض کنید  $DMU^{k^*}$  معادل فرضی  $DMU^k$  با مشاهده  $(X_{ik}, Y_{rk}, U_{fk}^*)$  باشد. مشابه با حالت نسبت مشترک، هر  $DMU$  با ورودی‌های  $X_{ik}$  و خروجی‌های مطلوب  $Y_{rk}$  تحت فرض دسترس‌پذیری با نسبت انفرادی، منجر به تولید خروجی‌های نامطلوب  $U_{fk}$  می‌شود که بزرگ‌تر یا مساوی با  $U_{fk}^*$  هستند.

تفاوت میان دسترس‌پذیری ضعیف با نسبت مشترک و نسبت انفرادی در این است که اولی نیارمند این است که تمام  $DMU$ ها، ضریب کاهش یکسانی در کاهش خروجی‌های مطلوب و نامطلوب داشته باشند در حالی که دومی امکان متفاوت بودن ضریب کاهش برای هر  $DMU$  را فراهم می‌کند. با مقایسه مدل (۲) با مدل (۳)، مشاهده می‌شود که این دو مدل، به جز در متغیرهای  $\mu_j$  در مجموعه اول و محدودیت‌های چهارم مدل اول که با  $(\mu_j + \theta_j)$  در مجموعه دوم جایگزین شده است، در سایر موارد، دقیقاً یکسان هستند که نشان



می‌دهد که مدل دوم در زمان یافتن بیشترین ارزش هدف، انعطاف‌پذیرتر است. در این حالت، مجموع اسلک تعیین‌شده  $\sum_{f=1}^h s_f^U / U_{fk}$  که در مدل (۳) محاسبه شده است، بزرگ‌تر یا مساوی با  $\sum_{f=1}^h s_f^U / U_{fk}$  محاسبه‌شده در مدل (۲) خواهد بود. توجه کنید که ممکن است برخی از اسلک‌های  $s_f^U$  محاسبه‌شده از مدل (۲)، بزرگ‌تر از  $s_f^{U*}$  مربوطه محاسبه‌شده از مدل (۳) باشند. DMUهای فرضی به‌دست‌آمده از مدل تناسب انفرادی، فقط در حالت کلی، در مقایسه با خروجی‌های حاصل از مدل نسبت مشترک، دارای سطوح پایین‌تری از خروجی‌های نامطلوب مجاز برای تولید هستند و اهداف دقیق‌تری را برای DMUها تعیین می‌کنند تا محافظت بهتری از محیط زیست داشته باشند.

### ۳- اثر خروجی‌های نامطلوب

$U_{fk}^*$  برابر با کمترین مقدار خروجی‌های نامطلوبی است که در تولید خروجی‌های مطلوب  $Y_{rk}$  با ورودی‌های  $X_{ik}$  نمی‌توان از آن‌ها اجتناب کرد. DMUهای  $k^*$  به طور کلی، کارای خروجی نامطلوب هستند. آن‌ها را می‌توان در ایجاد یک PPS برای اندازه‌گیری کارایی یک DMU استفاده کرد که از طریق مدل زیر، از ورودی‌های  $X_{ik}$  برای تولید خروجی‌های مطلوب  $Y_{rk}$  و خروجی‌های نامطلوب  $u_{fk} \geq U_{fk}^*$  استفاده می‌کند:

$$\rho_k = \min \frac{1 - \frac{1}{m+h} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^X}{X_{ik}} + \sum_{f=1}^h \frac{s_f^U}{u_{fk}} \right)}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^Y}{Y_{rk}}} \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n (\mu_j + \theta_j) X_{ij} + s_i^X = X_{ik}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j Y_{rj} - s_r^Y = Y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j U_{fj} + s_f^U = u_{fk}, \quad f = 1, \dots, h$$

$$\sum_{j=1}^n (\mu_j + \theta_j) = 1$$

$$\mu_j, \theta_j, s_i^X, s_r^Y, s_f^U \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s, f = 1, \dots, h$$

کائو و هوانگ (۲۰۲۱) مدل مشابهی را تحت دسترس‌پذیری ضعیف با نسبت مشترک توسعه دادند. فناوری مربوطه، همانطور که در کوسمانن و پودینوفسکی (۲۰۰۹) اشاره شد، در واقع صحیح (بی‌کم و کاست) نیست.

در مدل (۴)، اسلک‌های مرتبط با خروجی‌های نامطلوب به شکل  $(1 - s_f^U / u_{fk})$  در صورت کسر تابع هدف قرار می‌گیرند، زیرا مقادیر آن‌ها کاهش می‌یابد. خروجی‌های نامطلوب نیز به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند. سونگ و همکاران (۲۰۲۰)، خروجی‌های نامطلوب را به عنوان خروجی در نظر گرفتند و اسلک‌های مربوطه را در مخرج تابع هدف به شکل  $(1 + s_f^U / u_{fk})$  قرار دادند که نشان می‌دهد، اسلک‌ها مقادیری هستند که باید بسط یابند. روش ترجیحی ما، روش مرسوم قرار دادن اسلک‌ها در صورت کسر است.





کارایی‌های  $DMU^k$  اصلی،  $DMU^k$  معادل فرضی با نسبت مشترک مربوطه و  $DMU^k$  معادل فرضی با نسبت انفرادی را می‌توان از طریق این مدل محاسبه کرد. فرض کنید  $\rho_k^*$ ،  $\rho_k^\circ$  و  $\rho_k$  به ترتیب کارایی‌های  $DMU^k$ ،  $DMU^k$  و  $DMU^k$  را نشان دهند. بدیهی است که  $\rho_k$  کوچک‌تر یا مساوی  $\rho_k^\circ$  است که آن هم به نوبه خود، کوچک‌تر یا مساوی  $\rho_k^*$  است. عبارت  $(1 - \rho_k)$  برابر با کارایی  $DMU^k$  است که در صورت کارایی عملکرد این  $DMU$ ، می‌تواند افزایش یابد. همچنین می‌توان آن را برابر با ناکارایی این  $DMU$  در نظر گرفت. به طور مشابه،  $(1 - \rho_k^*)$  برابر با ناکارایی  $DMU^k$  فرضی است. تفاضل بین  $\rho_k^*$  و  $\rho_k$ ، به عنوان یک کارایی در نظر گرفته می‌شود که در صورت کاهش خروجی‌های نامطلوب  $DMU^k$  به  $U_{fk}^*$ ، می‌توان آن را افزایش داد. بنابراین، همان‌طور که در مدل (۳) تعیین شده است، برابر با از دست دادن کارایی ناشی از تولید مقدار بیشتری از خروجی‌های نامطلوب نسبت به خروجی‌های مجاز است. ناکارایی یک  $DMU$  را می‌توان به صورت مجموع ناکارایی در تولید خروجی‌های مطلوب و اثر تولید مقدار بیش از حد خروجی‌های نامطلوب بیان کرد:

$$(1 - \rho_k) = (1 - \rho_k^*) + (\rho_k^* - \rho_k). \quad (5)$$

به عبارت دیگر، می‌توانیم اثر خروجی‌های نامطلوب بر کارایی را از ناکارایی تولید خروجی‌های مطلوب، تفکیک کنیم. نسبت‌های  $(1 - \rho_k^*)$  به  $(1 - \rho_k)$  و  $(\rho_k^* - \rho_k)$  به  $(1 - \rho_k)$ ، به ترتیب نشان‌دهنده نسبت‌های ناکارایی ناشی از تولید ناکارای خروجی‌های مطلوب و اثر تولید بیش از حد مقدار خروجی‌های نامطلوب هستند. آنها به تصمیم‌گیرنده کمک می‌کنند تا در مورد بخشی که باید تلاش بیشتری در آن صرف شود، تصمیم‌گیری کند و در نتیجه، عملکرد به طور کاراتری بهبود یابد. مشابه با بحث بالا، تفاضل  $\rho_k^*$  و  $\rho_k$  به عنوان یک کارایی در نظر گرفته می‌شود که در صورت کاهش خروجی‌های نامطلوب  $DMU^k$  به  $U_{fk}^\circ$  تعیین شده در مدل (۲)، می‌توان آن را افزایش داد. عبارت  $(\rho_k^* - \rho_k^\circ)$  به عنوان یک کارایی در نظر گرفته می‌شود که در صورت کاهش خروجی‌های نامطلوب از  $U_{fk}^\circ$  به  $U_{fk}^*$ ، می‌تواند افزایش یابد. عبارت  $(\rho_k^* - \rho_k)$  در معادله (۵) می‌تواند به صورت  $(\rho_k^* - \rho_k^\circ) + (\rho_k^\circ - \rho_k)$  تجزیه شود تا (۶) به دست آید:

$$(1 - \rho_k) = (1 - \rho_k^*) + (\rho_k^* - \rho_k^\circ) + (\rho_k^\circ - \rho_k). \quad (6)$$

در این عبارت، کمترین سطوح خروجی‌های نامطلوب، به عنوان حالت‌های نسبت مشترک و نسبت انفرادی، متمایز می‌شوند.

#### ۴- مثال تشریحی

حالت بحث‌شده در کائو و هوانگ (۲۰۲۱) را در نظر بگیرید. دو ورودی  $X_1$  و  $X_2$ ، دو خروجی مطلوب  $Y_1$  و  $Y_2$ ، و یک خروجی نامطلوب  $U$  در نظر گرفته شده است. جدول ۱، داده‌ها را نشان می‌دهد. ستون‌های دو و سه جدول ۲، تحت عنوان "اسلک‌ها"، به ترتیب مقادیر بیش از حد خروجی نامطلوب  $S^{U^*}$  محاسبه‌شده از مدل (۲) و همچنین خروجی نامطلوب  $S^{U^\circ}$  محاسبه‌شده از مدل (۳) را نشان می‌دهند.

جدول ۱: داده‌ها برای حالت تشریحی

ورودی‌ها	خروجی‌های مطلوب		خروجی نامطلوب		
	$X_1$	$X_2$	$Y_1$	$Y_2$	$U$
DMU 1	437	1438	2015	14,667	665
2	884	1061	3452	2822	491
3	1160	9171	2276	2484	417
4	626	10,151	953	16,434	302

229	19,715	2578	8416	374	5
1083	20,743	3003	3038	597	6
1053	20,494	1860	3342	870	7
740	17,126	3338	9984	685	8
845	9548	2859	8877	582	9
517	18,683	1889	2829	763	10
664	15,732	2583	6057	689	11
313	13,104	1096	1609	355	12
1206	3723	3924	2352	851	13
377	13,095	1107	1222	926	14
792	15,588	2440	9698	203	15
524	10,550	4366	7141	1109	16
307	5258	2601	4391	861	17
1449	15,869	1788	7856	249	18
1131	12,383	793	3173	652	19
826	18,010	3456	3314	364	20
1357	17,568	3336	5422	670	21
1089	20,560	3791	4338	1023	22
652	16,524	4797	3665	1049	23
999	3907	2161	8549	1164	24
526	10,985	812	5162	1012	25
218	21,532	4403	10,504	464	26
1339	21,378	1825	9365	406	27
231	14,905	2990	9958	1132	28
1431	3854	4019	3552	593	29
965	17,440	815	6211	262	30

اعداد واقع در ستون‌های چهار تا شش، تحت عنوان «کارایی‌ها» برابر با کارایی‌های  $k^*$  DMU فرضی،  $k^o$  DMU فرضی و  $k$  DMU اصلی هستند که همگی از مدل (۴) محاسبه شده‌اند. دو ستون آخر تحت عنوان «نسبت‌ها» به ترتیب نسبت‌های  $(1 - \rho_k^*)$  به  $(1 - \rho_k)$  و  $(\rho_k^* - \rho_k)$  به  $(1 - \rho_k)$  را نشان می‌دهند. ردیف آخر، میانگین هر ستون را نشان می‌دهد.

جدول ۲: نتایج حالت تشریحی

DMU	اسلک‌ها		کارایی‌ها		نسبت‌ها	
	$S^{U^*}$	$S^{U^o}$	$\rho_k^*$	$\rho_k^o$	$\frac{1 - \rho_k^*}{1 - \rho_k}$	$\frac{\rho_k^* - \rho_k}{1 - \rho_k}$
1	0	0	1	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0
3	191.9775	304.3114	0.3215	0.1628	0.7807	0.2193
4	82.1403	135.6145	0.3722	0.3145	0.8771	0.1229
5	0	0	1	1	0	0
6	0	0	1	1	0	0
7	86.6400	86.6400	0.7031	0.7031	0.8583	0.1417
8	519.2605	566.6084	1	0.7140	0	1
9	618.4286	703.4416	1	0.5461	0	1
10	0	0	1	1	0	0



1	0	0.6101	0.8014	1	439.4877	400.3014	11
0	0	1	1	1	0	0	12
0.1778	0.8222	0.5029	0.5913	0.5913	541.0025	541.0025	13
0	0	1	1	1	0	0	14
0	0	1	1	1	0	0	15
0.2145	0.7855	0.5720	0.6638	0.6638	142.9395	142.9395	16
1	0	0.4843	1	1	81.0153	0	17
0.8326	0.1674	0.6696	0.9447	0.9447	746.9769	746.9769	18
0.5803	0.4197	0.2695	0.5233	0.6934	894.2735	837.3001	19
0	0	1	1	1	0	0	20
0.9439	0.0561	0.5703	0.9759	0.9759	965.5427	965.5427	21
0	0	1	1	1	0	0	22
0	0	1	1	1	0	0	23
0.2569	0.7431	0.1507	0.2399	0.3689	892.0052	770.7007	24
1	0	0.2685	0.3604	1	398.4688	256.8449	25
0	0	1	1	1	0	0	26
0	0	1	1	1	0	0	27
0.3519	0.6481	0.5575	0.5674	0.7132	80.0948	10.1236	28
0	0	1	1	1	0	0	29
0	0	1	1	1	0	0	30
0.5627	0.4373	0.7217	0.8036	0.8783	232.6141	205.6726	میانگین

از نتایج جدول ۲ مشاهده می‌شود که مطابق انتظار، مقدار خروجی نامطلوب قابل کاهش در حالت نسبت انفرادی یعنی  $S^{U^*}$ ، بزرگتر یا مساوی با مقدار قابل کاهش در حالت نسبت مشترک یعنی  $S^{U^*}$  به ازای هر DMU است. مقدار اسلک، مقدار بیش از حد خروجی‌های نامطلوب را نشان می‌دهد که برای اینکه یک DMU، کارای خروجی نامطلوب شود، باید کاهش یابد. به طور میانگین، مقدار اولی، ۱۳.۱۰ درصد

$$= [(232.6141 - 205.6726) / 205.6726] \times 100\%$$
 بیشتر از دومی است. شایان ذکر است که DMU 17، که توسط مدل نسبت مشترک، به عنوان کارای خروجی نامطلوب با  $S^{U^*} = 0$  ارزیابی می‌شود، می‌تواند خروجی نامطلوب را به مقدار  $S^{U^*} = 81.0153$  کاهش دهد.

مقادیر  $\rho_k$  در ستون شش نشان می‌دهند که پانزده DMU با میانگین کارایی ۰.۷۲۷۱، کارا هستند. کارایی‌های  $k^{\circ}$  DMU که در ستون پنج نشان داده شده‌اند، مطابق انتظار، بزرگتر یا مساوی با کارایی‌های  $k^{\circ}$  DMU هستند. شانزده DMU کارا از این نوع وجود دارد که میانگین کارایی آنها ۰.۸۰۳۶ است. DMU‌هایی از نوع  $k^{\circ}$ ، در مقایسه با DMU‌های معادل خود یعنی انواع  $k^{\circ}$  و  $k^{\circ}$ ، بالاترین کارایی را دارند. بیست DMU کارا از این نوع وجود دارد که میانگین کارایی آنها ۰.۸۷۸۳ است. مقادیر  $\rho_k^{\circ}$ ،  $\rho_k^*$  و  $\rho_k$  نشان می‌دهند که یک DMU ناکارا، کارا می‌شود و زمانی که مقدار خروجی نامطلوب  $k^{\circ}$  DMU اصلی به سطح تعیین شده توسط مدل نسبت انفرادی، کاهش می‌یابد، میانگین کارایی به میزان  $0.8036 - 0.7217 = 0.0819$  افزایش می‌یابد. در نتیجه، چهار DMU ناکارای دیگر نیز کارا می‌شوند و میانگین کارایی به ۰.۸۷۸۳ افزایش می‌یابد.

مقادیر  $U_k^*$  و  $U_k^{\circ}$  برای DMU‌های انفرادی، جهت‌هایی را برای بهبود کارایی به صورت گام به گام ارائه می‌دهند. به عنوان مثال، کارایی DMU شماره ۳ را می‌توان با کاهش خروجی نامطلوب آن به میزان ۱۹۱.۹۷۷۵ واحد، از ۰.۱۳۰۹ به ۰.۱۶۲۶ افزایش داد و با کاهش

۳۰۴.۳۱۱۴ واحد خروجی نامطلوب، آن را به ۰.۳۲۱۵ رساند. در این مرحله، اگر این DMU باز هم به دنبال افزایش کارایی خود باشد، باید یا ورودی‌ها را کاهش دهد یا خروجی‌های مطلوب را افزایش دهد. رابطه  $(1 - p_k^*) = (1 - p_k) + (p_k^* - p_k)$ ، ایده‌هایی را در خصوص منبع اصلی ناکارایی، ارائه می‌دهد. از DMU شماره ۳ برای توضیح این امر، استفاده می‌کنیم که رابطه موردنظر برای این DMU برابر با  $0.8691 = 0.6785 + 0.1906$  است که نشان می‌دهد  $(0.6785/0.8691) \times 100\% = 78.07\%$  از ناکارایی این DMU ناشی از تولید ناکارای خروجی‌های مطلوب و  $(0.1906/0.8691) \times 100\% = 21.93\%$  از ناکارایی آن، ناشی از تولید مقدار بیش از حد خروجی نامطلوب است. این دو درصد به تصمیم‌گیرنده اطلاع می‌دهند که باید تلاش بیشتری برای تولید خروجی‌های مطلوب با کارایی بیشتر، صورت گیرد تا در بهبود عملکرد این DMU مؤثرتر باشد. نسبت‌های میانگین نشان می‌دهند که به طور میانگین، ۴۳.۷۳ درصد (اشاره به عدد دوم تا آخر در ردیف آخر جدول ۲) از ناکارایی سی DMU، ناشی از تولید ناکارای خروجی‌های مطلوب و ۵۶.۲۷ درصد (آخرین عدد در ردیف آخر جدول ۲) کارایی، ناشی از تولید مقدار بیش از حد خروجی نامطلوب است.

## ۵- نتیجه‌گیری

دسترس‌پذیری ضعیف، فرضیه‌ای است که اغلب اوقات در اندازه‌گیری کارایی در حضور خروجی‌های نامطلوب به کار می‌رود. این مقاله تحت دسترس‌پذیری ضعیف، مدلی را برای محاسبه کمترین سطح خروجی‌های نامطلوب پیشنهاد می‌کند که در تولید خروجی‌های مطلوب با ورودی‌های مفروض، نمی‌توان از آن اجتناب کرد. یک PPS از این DMU‌های معادل فرضی با کمترین سطح خروجی‌های نامطلوب ساخته می‌شود. کارایی‌های DMU اصلی و فرضی براساس این PPS، محاسبه می‌شود. تفاوت بین کارایی این دو نوع از DMU در اثر تولید مقدار بیش از حد خروجی‌های نامطلوب است. دو شکل از دسترس‌پذیری ضعیف شامل نسبت مشترک و نسبت انفرادی وجود دارد که در اولی نیاز است که تمام DMU‌ها از نسبت یکسانی در کاهش خروجی‌های مطلوب و نامطلوب استفاده کنند در حالی که دومی برای هر DMU این امکان را فراهم می‌کند تا نسبت خاص خود را داشته باشند. این دو شکل از دسترس‌پذیری ضعیف، در این مقاله مورد بحث قرار می‌گیرند و یک حالت، برای اهداف تشریحی استفاده می‌شود. چندین یافته وجود دارد. اولاً، مدل نسبت انفرادی در مقایسه با مدل مشترک، می‌تواند سطوح پایین‌تری از خروجی‌های نامطلوبی را پیدا کند که در فرآیند تولید نمی‌توان از آنها اجتناب کرد. به عبارت دیگر، این مدل می‌تواند اهداف دقیق‌تری برای DMU‌ها پیدا کند تا خروجی‌های نامطلوب بیشتری را برای حفاظت بهتر از محیط زیست، حذف کند. دوماً، در نتیجه، اگر مقادیر خروجی‌های نامطلوب، به سطح تعیین‌شده توسط مدل نسبت مشترک، کاهش یابد، کارایی یک DMU، به سطح نسبتاً پایین‌تری، افزایش می‌یابد. اگر مقدار خروجی‌های نامطلوب، به سطح تعیین‌شده توسط مدل نسبت انفرادی کاهش یابد، کارایی این DMU، به سطح نسبتاً بالاتری، افزایش می‌یابد. سوماً، مدل پیشنهادی قادر است ناکارایی یک DMU را به مجموع ناکارایی تولید مقدار ناکافی از خروجی‌های مطلوب و از دست دادن کارایی ناشی از تولید مقدار بیش از حد خروجی‌های نامطلوب، تجزیه کند. تجزیه ناکارایی به تصمیم‌گیرنده کمک می‌کند تا عواملی را شناسایی کند که در آنها باید تلاش بیشتری برای بهبود عملکرد DMU به شیوه کاراتر، صورت گیرد.

## منابع

- Ball, V. E., Lovell, C. A. K., Nehring, R., & Somwaru, A. (1994). Incorporating undesirable outputs into models of production: An application to U.S. agriculture. *Cahiers d'Économie et Sociologie Rurales*, 31, 59–74.
- Charles, V., Kumar, M., & Kavitha, S. I. (2012). Measuring the efficiency of assembled printed circuit boards with undesirable outputs using data envelopment analysis. *International Journal of Production Economics*, 136, 194–206.
- Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L. M., & Stutz, J. (1985). Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production function. *Journal of Econometrics*, 30, 91–107.
- Coelli, T., Lauwers, L., & Van Huynenbroeck, G. (2007). Environmental efficiency measurement and the materials balance condition. *Journal of Productivity Analysis*, 28, 3–12.
- Dakpo, K. H., Jeanneaux, P., & Latruffe, L. (2016). Modelling pollution-generating technologies in performance benchmarking: Recent developments, limits and future prospects in the nonparametric framework. *European Journal of Operational Research*, 250, 347–359.
- Färe, R., & Grosskopf, S. (2003). Nonparametric productivity analysis with undesirable outputs: Comment. *American Journal of*

- Agricultural Economics, 85 , 1070–1074 .
- Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., & Pasurka, C. (1989). Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: A nonparametric approach. *The Review of Economics and Statistics*, 71 , 90–98 .
- Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., & Yaisawarng, S. (1993). Derivation of shadow prices for undesirable outputs: A distance function approach. *Review of Economics and Statistics*, 75 , 374–380 .
- Färe, R., Grosskopf, S., & Pasurka, C. (2013). Tradable permits and unrealized gains from trade. *Energy Economics*, 40 , 416–424 .
- Färe, R., Grosskopf, S., & Pasurka, C. (2014). Potential gains from trading bad out-puts: The case of U.S. electric power plants. *Resource and Energy Economics*, 36 , 99–112 .
- Kao, C. (2017). *Network data envelopment analysis: Foundations and extensions* . Switzerland: Springer International Publishing .
- Kao, C., & Hwang, S. N. (2021). Measuring the effects of undesirable outputs on the efficiency of production units. *European Journal of Operational Research*, 292 , 996–1003 .
- Kuosmanen, T. (2005). Weak disposability in nonparametric production analysis with undesirable outputs. *American Journal of Agricultural Economics*, 87 , 1077–1082 .
- Kuosmanen, T., & Podinovski, V. (2009). Weak disposability in nonparametric production analysis: Reply to Färe and Grosskopf. *American Journal of Agricultural Economics*, 91 , 539–545 .
- Lee, C. Y. (2015). Distinguishing operational performance in power production: A new measure of effectiveness by DEA. *IEEE Transactions on Power Systems*, 30 , 3160–3167 .
- Murty, S., Russell, R. R., & Levkoff, S. B. (2012). On modeling pollution-generating technologies. *Journal of Environmental Economics and Management*, 64 , 117–135 .
- Pishgar-Komleh, S. H., Zylowski, T., Rozakis, S., & Kozyra, J. (2020). Efficiency under different methods for incorporating undesirable outputs in an LCA + DEA frame-work: A case study of winter wheat production. *Journal of Environmental Management*, 260 , Article 110138 .
- Salim, R., Arjomandi, A., & Dakpo, K. H. (2017). Banks' efficiency and credit risk analysis using by-production approach: The case of Iranian banks. *Applied Economics*, 49 , 2974–2988 .
- Scheel, H. (2001). Undesirable outputs in efficiency valuations. *European Journal of Operational Research*, 132 , 400–410 .
- Shen, Z., Balezentis, T., & Streimikis, J. (2022). Capacity utilization and energy-related GHG emission in the European agriculture: A data envelopment analysis approach. *Journal of Environmental Management*, 318 , Article 115517 .
- Song, M., An, Q., Zhang, W., Wang, Z., & Wu, J. (2012). Environmental efficiency evaluation based on data envelopment analysis: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 16 , 4 465–4 469 .
- Song, M., Zhu, S., Wang, J., & Zhao, J. (2020). Share green growth: Regional evaluation of green output performance in China. *International Journal of Production Economics*, 219 , 152–163 .
- Vardanyan, M., & Noh, D. W. (2006). Approximating pollution abatement costs via alternative specifications of a multi-output production technology: A case of the US electric utility industry. *Journal of Environmental Management*, 80 , 177–190 .
- Zhou, P., Ang, B. W., & Poh, K. L. (2008). A survey of data envelopment analysis in energy and environmental studies. *European Journal of Operational Research*, 189 , 1–18

## Differentiation of the impact of producing undesirable outputs from inefficiencies in producing desirable outputs in measuring efficiency

**Fathollah Parbaz<sup>1</sup>**

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,  
Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

**Hossein Azizi**

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,  
Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

**Shahruz Fathi Ajirlu**

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

### Abstract

Undesirable outputs are by-products of producing desirable outputs that, according to the weak disposability assumption, can only decrease proportional to the desirable outputs. This article presents a model for determining the minimum level of undesirable outputs that cannot be avoided in the production of one unit of desirable output under weak disposability. The efficiency differential of a production unit and a related hypothetical unit that creates the minimum level for undesirable outputs is a measure of the impact of excessively producing undesirable outputs on efficiency. The proposed model is capable of differentiating the impact of producing undesirable outputs from inefficiencies in producing desirable outputs in measuring the efficiency of a production unit.

**Keywords:** Data envelopment analysis; Undesirable output; Weak disposability; Efficiency.

---

<sup>1</sup>Corresponding Author