



ترکیب در برابر تجزیه در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای

شهرام عنایتی تکه

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

حسین عزیزی

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

شهرزاد فتحی اجیرلو

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

چکیده

رویکردهای تجزیه کارایی ضریبی و جمعی، رویکردهای اساسی برای تجزیه و تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای دو مرحله‌ای هستند که هر دوی آنها یک رابطه متوالی را بین دو مرحله در نظر می‌گیرند ولی در تعریف کارایی کلی سیستم و همچنین در روش مفهوم‌سازی تجزیه کارایی کلی به کارایی‌های مرحله‌ای انفرادی، با یکدیگر تفاوت دارند. در این مقاله، نشان می‌دهیم که تخمین‌های کارایی به‌دست‌آمده با روش تجزیه جمعی، به دلیل تمایل بیش از اندازه به یک مرحله در مقایسه با دیگری، مغرضانه هستند، در حالی که آنهایی که با روش ضریبی به‌دست می‌آیند، منحصر به فرد نیستند.

کلمات کلیدی: تجزیه و تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، فرآیند دو مرحله‌ای، DEA شبکه‌ای، تجزیه، ترکیب، مرز کارا

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، یک تکنیک پرکاربرد برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) همتا است که از ورودی‌های متعدد برای تولید خروجی‌های متعدد استفاده می‌کنند. دو مدل مهم DEA، یعنی مدل‌های CCR (چارنز و همکاران^۱ ۱۹۷۸) و مدل‌های BCC (بنکر و همکاران^۲ ۱۹۸۴)، به ترتیب تحت مفروضات بازده به مقیاس ثابت و بازده به مقیاس متغیر، تبدیل به استانداردهایی در ادبیات اندازه‌گیری عملکرد شده‌اند. مدل‌های DEA مرسوم، DMUها را به عنوان فرآیندهای تولید تک مرحله‌ای در نظر می‌گیرند که برخی از ورودی‌های خارجی را به خروجی‌های نهایی تبدیل می‌کنند. ساختار داخلی DMUها در چنین تنظیماتی در نظر گرفته نمی‌شود. با این حال، تعداد قابل توجهی از مطالعات بر ارزیابی کارایی در فرآیندهای تولید چندمرحله‌ای متمرکز شده‌اند که در آن، خروجی‌های برخی از مراحل، که به عنوان محصولات بینابینی شناخته می‌شوند، یا به عنوان ورودی برای سایر مراحل یا به عنوان خروجی‌های خارجی فرآیند تولید، استفاده می‌شوند. فاره و

¹Charnes et al

²Banker et al

گروسکوپف^۳ (۱۹۹۶) از اولین افرادی بودند که ارزیابی کارایی را در چنین فرآیندهایی بررسی کردند که به عنوان مدل‌های تجزیه و تحلیل فعالیت شبکه‌ای ارائه می‌شوند. کاستلی و همکاران^۴ (۲۰۱۰) یک بررسی اجمالی طبقه‌بندی‌شده از مدل‌ها و روش‌های توسعه‌یافته را برای ساختارهای تولید چندمرحله‌ای مختلف ارائه می‌دهند. با این حال، در این مقاله، بر روی ساختار معمول یک فرآیند تولید دو مرحله‌ای تمرکز می‌کنیم که فرض می‌کند ورودی‌های خارجی به مرحله اول فرآیند وارد می‌شوند به تعدادی اندازه بینابینی تبدیل می‌شوند که در مرحله دوم، برای تولید خروجی‌های نهایی، به عنوان ورودی استفاده می‌شوند. در این ساختار، چیزی به جز ورودی‌های خارجی مرحله اول، وارد سیستم نمی‌شود و چیزی به جز خروجی‌های مرحله دوم از سیستم خارج نمی‌شود. کائو و هوانگ^۵ (۲۰۰۸) با در نظر گرفتن یک رابطه متوالی از دو مرحله، رویکرد نوآورانه‌ای را معرفی کردند و مدلی را برای تخمین کارایی کلی فرآیند تولید به عنوان محصول (ضرب) کارایی دو مرحله انفرادی ایجاد کردند. رویکرد آنها بر این فرض منطقی استوار است که مقادیر اندازه‌های بینابینی یکسان هستند و تفاوتی ندارد که به عنوان خروجی مرحله اول یا ورودی مرحله دوم در نظر گرفته شوند. همان‌طور که آنها اشاره کردند، تجزیه‌کاری کلی به کارایی‌های مرحله‌ای ممکن است منحصر به فرد نباشد. آنها به منظور بررسی منحصربه‌فرد بودن، یک روش پس‌ببینی را پیشنهاد دادند تا بزرگ‌ترین امتیاز کارایی مرحله اول (یا دوم) را به دست آورند و در عین حال کارایی کلی را بدون تغییر نگه دارند. لیانگ و همکاران^۶ (۲۰۰۸)، ارزیابی‌های کارایی در فرآیند دو مرحله‌ای را از منظر یک رویکرد بازبررسی می‌کنند. چن و همکاران^۷ (۲۰۰۹) با حفظ رابطه متوالی میان دو مرحله، تجزیه‌کاری جمعی را در فرآیندهای دو مرحله‌ای معرفی کردند. آنها کارایی کلی فرآیند تولید را به عنوان یک میانگین وزنی از کارایی‌های مراحل انفرادی به دست آوردند. رویکرد مدل‌سازی آنها، با این فرض که وزن‌های دو مرحله به‌طور درون‌زا توسط فرآیند بهینه‌سازی استخراج می‌شوند، خطی‌سازیک برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی را تسهیل می‌کند. این فرض، همان‌طور که در بخش بعدی مشخص خواهد شد، منجر به ارزیابی‌های کارایی مغرضانه می‌شود. استخراج مرز کارا در DEA دو مرحله‌ای، موضوعی است که در تحقیقات، بیشتر مورد بررسی قرار می‌گیرد. چن و همکاران (۲۰۱۰) نشان دادند زمانی که مدل تجزیه‌بده صورت جمعی فرض می‌شود، تنظیم ورودی‌ها و خروجی‌ها توسط امتیازهای کارایی برای ایجاد یک تصویر مرزی، کافی نیست. آنها در عوض، مدلی را برای استخراج مرز کارا در چارچوب ضربی کائو و هوانگ (۲۰۰۸) ایجاد کردند. ناتوانی مدل‌های DEA دو مرحله‌ای در مکان‌یابی صحیح مرز کارا از جمله در حالت DEA استاندارد، در چن و همکاران (۲۰۱۳) بررسی شده است. در آنجا نشان داده شد که مدل‌های DEA ضربی و شبکه‌ای پوششی، تحت ساختارهای شبکه‌ای کلی، دو رویکرد متفاوت هستند، بنابراین، روش‌های جایگزین برای برطرف ساختن این ضعف، بررسی شدند.

در این مقاله، روش‌های تجزیه کارایی جمعی و ضربی را برای بحث در مورد نقاط ضعف فوق‌بررسی می‌کنیم. سپس، براساس یک دیدگاه معکوس در مورد نحوه به دست آوردن و تجمیع کارایی‌های مرحله‌ای، که شامل ترکیب در برابر تجزیه است، یک رویکرد جدید را برای DEA شبکه‌ای دو مرحله‌ای ایجاد می‌کنیم که ضعف‌های روش‌های تجزیه‌بده برطرف می‌سازد. با انتخاب یکماهیت خروجی برای مرحله اول و یک ماهیت ورودی برای مرحله دوم، نشان می‌دهیم که در یک چارچوب بهینه‌سازی دوهدفه، امکان به دست آوردن امتیازهای کارایی بی‌غرض برای دو مرحله وجود دارد. دو مدل جایگزین را با استفاده از توابع عددی‌سازی مختلف در یک مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) پیشنهاد می‌کنیم. اولاً، دو هدف رابه صورت جمعی، در یک هدف واحد تجمیع می‌کنیم که یک جواب بهینه پارتوی راسی را تعیین می‌کند. سپس، یک مدل حداقل-حداکثر را ایجاد می‌کنیم که با قرار دادن نقطه‌ای در مرز پارتو، نه لزوماً اکسترمم، امتیازهای کارایی منحصربه‌فردی را ارائه می‌دهد. در حالت دوم، کارایی‌های مرحله‌ای به دست آمده، متعادل‌تر هستند. سپس با انتخاب روش تجمیع (ترکیب) به صورت پسین، از امتیازهای کارایی انفرادی برای محاسبه کارایی کلی فرآیند تولید استفاده می‌شود. از آنجایی که نقش متناقض اندازه‌های بینابینی، ویژگی

³Fare and Grosskopf

⁴Castelli et al

⁵Kao and Hwang

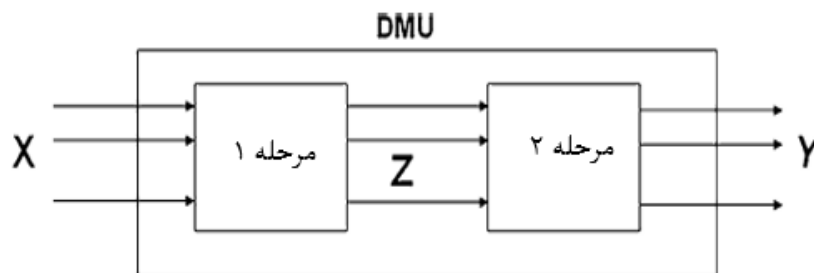
⁶Liang et al

⁷Chen et al

خاصی را به فرآیندهای دو مرحله‌ای می‌دهد که مفروضات DEA استاندارد را در هاله‌ای از ابهام قرار می‌دهد، لذا یک مدل پوششی را برای تعیین مرز کاراتوسعه می‌دهیم، که به دست آمدن آن از مدلزبری اولیه، توجیه می‌شود. این مقاله به صورت زیر بسط داده می‌شود. در بخش دوم، یک مرور انتقادی از رویکردهای تجزیه‌کارایی جمعی و ضربی ارائه می‌کنیم و محدودیت‌ها و ضعف‌های ذاتی آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش سوم، یک رویکرد جدید را برای ارزیابی کارایی انفرادی دو مرحله و کارایی کلی فرآیند دو مرحله‌ای، معرفی می‌کنیم که به طور کارا بر ضعف‌های روش‌های تجزیه جمعی (چن و همکاران ۲۰۰۹) و روش‌های تجزیه‌ضربی (کائو و هوانگ، ۲۰۰۸) غلبه می‌کند. در بخش چهارم، براساس داده‌های تجربی و همچنین با داده‌های آزمایشی برگرفته از تحقیقات، مقایسه‌های گسترده‌ای از رویکرد خود با دو روش تجزیه فوق را ارائه می‌دهیم. همچنین توجیه‌های دقیقی را برای شباهت‌ها و تفاوت‌های مشاهده‌شده در نتایج ارائه می‌کنیم. در بخش پنجم، یک مدل پوششی را برای استخراج مرز کارا در DEA دو مرحله‌ای معرفی می‌کنیم که به مدل ارزیابی کارایی‌ضربی اولیه ما مرتبط است و براساس آن، توسعه یافته است. بخش ششم شامل نتیجه‌گیری است.

۲- رویکرد تجزیه برای DEA دو مرحله‌ای: یک مرور انتقادی

حالت کلی را در نظر بگیرید که همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، هر DMU برخی از ورودی‌های خارجی X را از طریق اندازه‌های بینابینی Z با یک فرآیند دو مرحله‌ای، به خروجی نهایی Y تبدیل می‌کند. $DMU(j = 1, \dots, n)$ را در نظر بگیرید که هر یک، از m ورودی خارجی $x_{ij}, i = 1, \dots, m$ در مرحله اول برای تولید q خروجی $z_{pj}, p = 1, \dots, q$ از همان مرحله استفاده می‌کنند. آنگاه خروجی‌های به دست آمده از مرحله اول، به عنوان ورودی دوم برای تولید خروجی‌های نهایی $y_{rj}, r = 1, \dots, s$ استفاده می‌شوند. در این تنظیمات اولیه، چیزی به جز ورودی‌های خارجی مرحله اول وارد سیستم نمی‌شود و چیزیه جز خروجی‌های مرحله دوم از سیستم خارج نمی‌شود. حال نمادهای پایه‌ای زیر را معرفی کنیم:



شکل ۱: ساختار یک فرآیند دو مرحله‌ای کلی

$J = \{1, \dots, n\}$: مجموعه شاخص DMU_n .

$j_0 \in J$: DMU ارزیابی شده را نشان می‌دهد.

$X_j = (x_{ij}, i = 1, \dots, m)$: بردار ورودی‌های خارجی مورد استفاده توسط $DMU_j, j \in J$

$Z_j = (z_{pj}, p = 1, \dots, q)$: بردار اندازه‌های بینابینی برای $DMU_j, j \in J$

$Y_j = (y_{rj}, r = 1, \dots, s)$: بردار خروجی‌های نهایی تولیدشده توسط $DMU_j, j \in J$

$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$: بردار وزن‌ها برای ورودی‌های خارجی در مدل کسری.

$v = (v_1, \dots, v_m)$: بردار وزن‌ها برای ورودی‌های خارجی در مدل خطی.

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$: بردار وزن‌ها برای اندازه‌های بینابینی در مدل کسری.

$w = (w_1, \dots, w_q)$: بردار وزن‌ها برای اندازه‌های بینابینی در مدل خطی.

$u = (u_1, \dots, u_s)$: بردار وزن‌ها برای خروجی‌های نهایی در مدل خطی.

e_j^0 : کارایی کلی $DMU_j, j \in J$

e_j^1 : کارایی مرحله اول برای $DMU_j, j \in J$



e_j^2 : کارایی مرحله دوم برای $j \in J$ ، DMU_j

یک مشخصه اصلی رویکرد تجزیه این است که جدا از تعریف کارایی دو مرحله‌انفرادی (کارایی‌های مرحله‌ای)، کارایی کلی DMU را به همراه مدلی برای تجزیه‌کارایی کلی به کارایی‌های مرحله‌ای ارائه می‌کند. سپس، امتیازهای کارایی دو مرحله به عنوان نتیجه‌ای از کارایی کلی واحد به‌دست می‌آید. دو روش تجزیه اساسی که بر تحقیقات DEA دو مرحله‌ای غالب هستند، یعنی روش ضربی کائو و هوانگ (۲۰۰۸) و روش جمعی چن و همکاران (۲۰۰۹) تعاریفیکسانیرا از کارایی‌های مرحله‌ای در نظر می‌گیرند ولی در تعریف کارایی کلی و همچنین در مدل تجزیه‌کار گرفته، تفاوت اساسی دارند. مدل‌های اولیه CRS-DEA با ماهیت ورودی را در نظر بگیرید که کارایی‌های مرحله-۱، مرحله-۲ و کارایی کلی واحد ارزیابی‌شده j_0 را به طور مستقل تخمین می‌زنند:

مرحله ۱:

$$\text{s.t. max } \frac{\varphi Z_{j_0}}{\eta X_{j_0}} \quad (1)$$

$$\frac{\varphi Z_j}{\eta X_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\eta \geq 0, \varphi \geq 0$$

مرحله ۲:

(۲)

$$\text{s.t. } \frac{\omega Y_j}{\hat{\varphi} Z_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \hat{\varphi} \geq 0, \omega \geq 0 \text{ max } \frac{\omega Y_{j_0}}{\hat{\varphi} Z_{j_0}}$$

کلی

$$\text{s.t. } \frac{\omega Y_j}{\eta X_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \eta \geq 0, \omega \geq 0 \text{ max } \frac{\omega Y_{j_0}}{\eta X_{j_0}} \quad (3)$$

به منظور مرتبط ساختن ارزیابی‌های کارایی دو مرحله، به طور کلی پذیرفته شده است که وزن‌های مرتبط با اندازه‌های بینابینی، یکسان (یعنی $\hat{\varphi} = \varphi$) هستند و مهم نیست که این اندازه‌ها به عنوان خروجی‌های مرحله اول یا ورودی‌های مرحله دوم در نظر گرفته شوند.

۱-۲- روش ضربی

در روش ضربی معرفی‌شده توسط کائو و هوانگ (۲۰۰۸)، کارایی کلی و کارایی‌های مرحله‌ای DMU_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_j^o = \frac{\omega Y_j}{\eta X_j}, e_j^1 = \frac{\varphi Z_j}{\eta X_j}, e_j^2 = \frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j} \quad (4)$$

در حالی که مدل تجزیه استفاده‌شده برابر است با:

$$e_j^o = \frac{\omega Y_j}{\eta X_j} = \frac{\varphi Z_j}{\eta X_j} \cdot \frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j} = e_j^1 \cdot e_j^2 \quad (5)$$

یعنی کارایی کلی، برابر بامجدور میانگین هندسی کارایی‌های مرحله‌ای است.

مدل زیر با توجه به تعاریف فوق، کارایی کلی واحد ارزیابی‌شده j_0 را ارزیابی می‌کند:

$$e_{j_0}^o = \max \frac{\omega Y_{j_0}}{\eta X_{j_0}} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \\ \frac{\varphi Z_j}{\eta X_j} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n \\ \frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n \\ \varphi &\geq 0, \eta \geq 0, \omega \geq 0 \end{aligned}$$

توجه کنید که محدودیت‌های $\omega Y_j / \eta X_j \leq 1, j = 1, \dots, n$ ، زائد هستند و در نتیجه، حذف می‌شوند. مدل (۶) یک برنامه‌ریزی خطی کسری است که می‌توان با اعمال تبدیل چارنز و کوپر (۱۹۶۲) (از این پس تبدیل C-C) آن را به صورت زیر به عنوان یک برنامه‌ریزی خطی، مدل‌سازی و حل کرد:

$$\begin{aligned} e_{j_0}^o &= \max u Y_{j_0} \\ \text{s.t.} \\ v X_{j_0} &= 1 \\ w Z_j - v X_j &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ u Y_j - w Z_j &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ v &\geq 0, w \geq 0, u \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

زمانی که یک جواب بهینه (v^*, w^*, u^*) مدل (۷) بدست آمد، کارایی کلی و کارایی‌های مرحله‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$e_{j_0}^o = u^* Y_{j_0}, \quad e_{j_0}^1 = w^* Z_{j_0}, \quad e_{j_0}^2 = \frac{e_{j_0}^o}{e_{j_0}^1} \quad (8)$$

توجه کنید که کارایی کلی به عنوان مقدار بهینه تابع هدف به دست می‌آید، کارایی مرحله ۱ با اندازه بینابینی مجازی ارائه می‌شود، در حالی که کارایی مرحله ۲ به عنوان نتیجه‌ای از کارایی‌های کلی و مرحله ۱ به دست می‌آید. ضعف عمده روش ضربی این است که تجزیه‌کارایی کلی به کارایی‌های مرحله‌ای، منحصر به فرد نیست. در واقع، از آنجایی که عبارت $w Z_{j_0}$ ، نه در تابع هدف و نه در محدودیت نرمال‌سازی ظاهر نمی‌شود، مقدار آن ممکن است تغییر کند و همچنان مقدار بهینه تابع هدف (یعنی کارایی کلی) و محدودیت‌های نامساوی مدل (۷) را حفظ کند. به همین دلیل است که کائو و هوانگ (۲۰۰۸)، حل یکزوج (جفت) برنامه‌ریزی خطی را در مرحله پس‌بهینگی پیشنهاد می‌کنند تا با حفظ امتیاز کارایی کلی حاصل از مدل (۷)، مقادیر اکسترمم را برای $e_{j_0}^1$ و $e_{j_0}^2$ به دست آورند. استدلال مورد نظر این است که ممکن است در ارزیابی کارایی‌ها، به مرحله اول یا دوم اولویت داده شود. اگرچه این استدلال، منطقی‌است ولی منحصر به فرد نبودن تجزیه، به ویژه در حالتی که هیچ اولویتی توسط مدیرتدر نظر گرفته نمی‌شود، همچنان یک مشکل است. تعدادی از مثال‌ها، غیر منحصر به فرد بودن تجزیه ضربی را تأیید کرده‌اند.

۲-۲- روش جمعی

در روش تجزیه‌جمعی معرفی‌شده توسط چن و همکاران (۲۰۰۹)، کارایی کلی و کارایی‌های مرحله‌ای DMU_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_j^o = \frac{\omega Y_j + \varphi Z_j}{\eta X_j + \varphi Z_j}, \quad e_j^1 = \frac{\varphi Z_j}{\eta X_j}, \quad e_j^2 = \frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j} \quad (9)$$

تعریف‌کارایی‌های مرحله‌ای، مانند روش ضربی است ولی تعریف‌کارایی کلی در روش جمعی، تفاوت دارد. شایان ذکر است که در رابطه (۹)، اندازه‌های بینابینی در هر دو عبارت کسر ظاهر می‌شوند که کارایی کلی را تعریف می‌کند، یعنی آنها به طور همزمان به عنوان ورودی‌ها و به عنوان خروجی‌ها در نظر گرفته می‌شوند. مدل تجزیه‌مورد استفاده به شرح زیر است:

$$\frac{\omega Y_j + \varphi Z_j}{\eta X_j + \varphi Z_j} = t_j^1 \frac{\varphi Z_j}{\eta X_j} + t_j^2 \frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j}, \quad t_j^1 + t_j^2 = 1 \quad (10)$$

یعنی‌کارایی کلی، برابر با میانگین حسابی وزن‌یکارایی‌های مرحله‌ای است. شکل‌های تابعی وزن‌ها با حل سیستم (۱۰) به‌زای t_j^1 و t_j^2 به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$t_j^1 = \frac{\eta X_j}{\eta X_j + \varphi Z_j}, \quad t_j^2 = \frac{\varphi Z_j}{\eta X_j + \varphi Z_j} \quad (11)$$

شایان ذکر است که با توجه به اینکه، وزن‌ها تابعی از اندازه‌های واقعی هستند، به واحد مورد ارزیابی بستگی دارند و بدیهی است که به طور کلی از یک واحد به واحد دیگر، متمایز می‌شوند.

مدل زیر با توجه به تعاریف فوق، کارایی کلی واحد ارزیابی شده j_0 را ارزیابی می‌کند:

$$e_{j_0}^o = \max \frac{\omega Y_{j_0} + \varphi Z_{j_0}}{\eta X_{j_0} + \varphi Z_{j_0}} \quad (12)$$

s.t.

$$\frac{\varphi Z_j}{\eta X_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\eta \geq 0, \varphi \geq 0, \omega \geq 0$$

با اعمال تبدیل C-C به مدل کسری خطی (۱۲)، برنامه‌ریزی خطی زیر مدل‌سازی و حل می‌شود:

$$e_{j_0}^o = \max u Y_{j_0} + w Z_{j_0} \quad (13)$$

s.t.

$$v X_{j_0} + w Z_{j_0} = 1$$

$$w Z_j - v X_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$u Y_j - w Z_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v \geq 0, w \geq 0, u \geq 0$$

زمانی که یکجواب بهینه (v^*, w^*, u^*) مدل (۱۳) بدست آمد، کارایی کلی و کارایی‌های مرحله‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$e_{j_0}^o = u^* Y_{j_0} + w^* Z_{j_0} \quad (14)$$

$$t_{j_0}^1 = v^* X_{j_0}, \quad t_{j_0}^2 = w^* Z_{j_0}$$

$$e_{j_0}^1 = \frac{w^* Z_{j_0}}{v^* X_{j_0}} = \frac{t_{j_0}^2}{t_{j_0}^1}$$

$$e_{j_0}^2 = \frac{e_{j_0}^o - t_{j_0}^1 e_{j_0}^1}{t_{j_0}^2} = \frac{u^* Y_{j_0}}{w^* Z_{j_0}}$$

کارایی کلی $e_{j_0}^o$ به عنوان مقدار بهینه تابع هدف، وزن $t_{j_0}^1$ به عنوان ورودی مجازی بهینه و وزن $t_{j_0}^2$ به عنوان اندازه بینابینی مجازی بهینه به‌دست می‌آیند. کارایی مرحله اول $e_{j_0}^1$ با نسبت دو وزن داده می‌شود، در حالی که کارایی مرحله دوم $e_{j_0}^2$ به عنوان نتیجه‌ای از $e_{j_0}^o, e_{j_0}^1, t_{j_0}^1, t_{j_0}^2$ به دست می‌آید.

استدلال ارائه شده در چن و همکاران (۲۰۰۹) برای وزن‌های t_j^1 و t_j^2 این است که آنها سهم نسبی دو مرحله را در عملکرد کلی DMU نشان می‌دهند. "اندازه" هر مرحله که توسط سهم کل منابع اختصاصی به هر مرحله اندازه‌گیری می‌شود، به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که منعکس‌کننده سهم نسبی آنها در کارایی کلی DMU است. با این حال، تا زمانی که وزن‌ها از جواب بهینه (۱۳) به دست می‌آیند، به DMU در حال ارزیابی، بستگی دارند و به طور کلی، به ازای DMUهای مختلف، متفاوت هستند. بنابراین، "اندازه" یک مرحله، واقعیت‌بینی نیست، زیرا براساس هر DMU، به طور متفاوتی مشاهده می‌شود. اما این مورد، تنها ویژگی خاصی نیست که از تعریف وزن‌ها به دست می‌آید. در واقع، از تعریف وزن‌های رابطه (۱۱) و همچنین رابطه (۱۴)، داریم:

$$\frac{t_j^2}{t_j^1} = \frac{wZ_j}{vX_j} = e_j^1 \leq 1$$

یعنی $t_j^2 \leq t_j^1$ است. این امر نشان‌دهنده ضعف در مدل تجزیه‌جمعی (۱۳) است، زیرا ارزیابی‌های کارایی را در راستای مرحله دوم، معرضانه می‌کند. در واقع، حداکثر مقداری که t_j^2 می‌تواند کسب کند، برابر با ۰.۵ است و e_j^2 با کاهش t_j^2 ، افزایش می‌یابد (e_j^1 کاهش می‌یابد). تا زمانی که امتیازهای کارایی انفرادی، معرضانه باشد، امتیاز کارایی کلی نیز معرضانه است.

۳- رویکرد ترکیب: یک دیدگاه معکوس

در این بخش، یک رویکردی غرضاً برای ارزیابی امتیازهای کارایی منحصر به فرد دو مرحله معرفی می‌کنیم که برای به دست آوردن امتیاز کارایی کلی واحد ارزیابی شده، جمع می‌شوند. روش ما برخلاف روش‌های تجزیه ارائه شده در بخش قبل، نیازی به تعریف قبلی از کارایی کلی ندارد. این امر موجب انعطاف‌پذیری رویکرد ما در انتخاب روش جمع پسینمی‌شود. فرض کنید این رویکرد را "رویکرد ترکیب" در برابر رویکرد تجزیه بنامیم. کارایی دو مرحله‌ای را همانند روش‌های دیگر به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{e}_j^1 = \frac{\varphi Z_j}{\eta X_j}, \hat{e}_j^2 = \frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j}$$

۳-۱- بازده به مقیاس ثابت

معکوس مدل (۱) یعنی مدل CRS-DEA با ماهیت خروجی برای مرحله اول و مدل CRS-DEA با ماهیت ورودی (۲) را برای مرحله دوم در نظر بگیرید که در آن، وزن‌های بینابینی یکسانی برای هر دو مرحله در نظر گرفته شده است:

مرحله I: ماهیت خروجی

$$\text{s.t. min } \frac{\eta X_{j_0}}{\varphi Z_{j_0}} \quad (15)$$

$$\frac{\eta X_j}{\varphi Z_j} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\eta \geq 0, \varphi \geq 0$$

مرحله II: ماهیت ورودی

$$\text{max } \frac{\omega Y_{j_0}}{\varphi Z_{j_0}} \quad (16)$$

$$\text{s.t.}$$

$$\frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\varphi \geq 0, \omega \geq 0$$

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، مدل‌های (۱۵) و (۱۶) به ترتیب امتیازهای کارایی مستقل $1/E_{j_0}^1$ و $E_{j_0}^2$ را برای مرحله اول و دوم ارائه می‌دهند. با اضافه کردن محدودیت‌های مدل (۱۵) به مدل (۱۶) و بالعکس، مدل‌های افزوده (۱۷) و (۱۸) زیر را به ترتیب برای مرحله اول و دوم به دست می‌آوریم:

مرحله I: ماهیت خروجی

$$\min \frac{\eta X_{j_0}}{\varphi Z_{j_0}} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \\ \frac{\eta X_j}{\varphi Z_j} &\geq 1, \quad j = 1, \dots, n \\ \frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n \\ \eta &\geq 0, \varphi \geq 0, \omega \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله II: ماهیت ورودی

$$\text{s.t.} \frac{\eta X_j}{\varphi Z_j} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n, \frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \eta \geq 0, \varphi \geq 0, \omega \geq 0 \max \frac{\omega Y_{j_0}}{\varphi Z_{j_0}} \quad (18)$$

توجه کنید که جواب بهینه مدل (۱۵)، در مدل (۱۷) نیز بهینه است. در واقع، در مدل (۱۷) همیشه می‌توان مقادیر کافیرا برای ω انتخاب کرد تا هر جواب بهینه مدل (۱۵) را در مدل (۱۷)، شدنی و در عین حال بهینه سازد. به طور مشابه، یکجواب بهینه مدل (۱۶) در مدل (۱۸) نیز بهینه است، زیرا در مدل (۱۸) می‌توان مقادیر به اندازه کافی بزرگ را برای η انتخاب کرد تا هر جواب بهینه مدل (۱۶) را در مدل (۱۸)، شدنی و در عین حال بهینه‌سازد.

مدل‌های (۱۷) و (۱۸) دارای محدودیت‌های مشترک هستند و در نتیجه می‌توانند به طور مشترک به عنوان یک برنامه‌ریزی دو هدفه در نظر گرفته شوند:

$$\min \frac{\eta X_{j_0}}{\varphi Z_{j_0}} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \max \frac{\omega Y_{j_0}}{\varphi Z_{j_0}} \\ \text{s.t.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta X_j}{\varphi Z_j} &\geq 1, \quad j = 1, \dots, n \\ \frac{\omega Y_j}{\varphi Z_j} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n \\ \eta &\geq 0, \varphi \geq 0, \omega \geq 0 \end{aligned}$$

مدل (۱۹) را با استفاده از تبدیل C-C می‌توان به صورت یک برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) فرموله و حل کرد. تناظر متغیرها عبارت است از: $t\eta, u = t\omega, w = t\varphi$ که v یک متغیر اسکالر است به گونه‌ای که $t\varphi Z_{j_0} = 1$.

$$E_{j_0}^1 = \min v X_{j_0} \quad (20)$$

$$E_{j_0}^2 = \max u Y_{j_0}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \\ w Z_{j_0} &= 1 \\ w Z_j - v X_j &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ u Y_j - w Z_j &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ v &\geq 0, w \geq 0, u \geq 0 \end{aligned}$$



امتیازهای کارایی مستقل دو مرحله $(1/E_{j_0}^1 \leq 1, E_{j_0}^2 \leq 1)$ با بهینه‌سازی جداگانه تابع هدف اول و دوم به دست می‌آید. بردار $(E_{j_0}^1 \geq 1, E_{j_0}^2 \leq 1)$ بر حسب MOLP، نقطه ایده‌آل برنامه‌ریزی دو هدفه (۲۰) را در فضای توابع هدف تشکیل می‌دهد. بنابراین، کارایی‌های دو مرحله را می‌توان با حل MOLP (۲۰) به دست آورد. با این حال، از آنجایی که نقطه ایده‌آل، به طور کلی قابل‌دستیابی نیست، حل یک MOLP به معنای یافتن جواب‌های نامغلوب شدنی در فضای متغیری است که در مرز پارتوی فضای توابع هدف نگاشت شده‌اند، یعنی جواب‌هایی که نمی‌توان آنها را تغییر داد تا مقدار یکتابع هدف، بدون کاهش مقدار در حداقل یک تابع هدف دیگر افزایش یابد. در میان رویکردهای مختلف برای حل یک MOLP، از رویکرد تجمیع ترجیح پیشین استفاده می‌کنیم که می‌تواند به سادگی پذیرای ارزیابی‌های بدون ترجیح و همچنین با ترجیح بالا باشد. در ادامه، مدل‌های خود را برای ارزیابی‌های کارایی بدون ترجیح (خنثی) توسعه می‌دهیم یعنی ترجیحی را از سوی تحلیلگری که به یکی از دو مرحله اولویت می‌دهد، در نظر نمی‌گیریم. ادغام ترجیح‌های اولویت‌بندی، ساده است. رویکرد رایج در حل یک MOLP، رویکرد عددی‌سازی است که MOLP را به یک برنامه‌ریزی خطی (LP) تک‌هدف تبدیل می‌کند و جواب بهینه آن یک جواب بهینه پارتوی (نامغلوب) MOLP است. تجمیع توابع هدف به طور جمعی و معرفی یک تابع فاصله، دو روش جایگزین برای ایجاد تابع عددی‌سازی هستند. هر دو مورد را در ادامه ارائه می‌دهیم زیرا دارای ویژگی‌های متفاوتی هستند.

با تجمیع دو تابع هدف به صورت جمعی، برنامه‌ریزی تک‌هدفه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \min & vX_{j_0} - uY_{j_0} \\ \text{s.t.} & \\ & wZ_{j_0} = 1 \\ & wZ_j - vX_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & uY_j - wZ_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & v \geq 0, w \geq 0, u \geq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

زمانی که جواب بهینه (v^*, w^*, u^*) مدل (۲۱) به دست آمد، امتیازهای کارایی برای واحد j_0 در مرحله اول و دوم به ترتیب عبارتند از:

$$\hat{e}_{j_0}^1 = \frac{w^*Z_{j_0}}{v^*X_{j_0}} = \frac{1}{v^*X_{j_0}}, \quad \hat{e}_{j_0}^2 = \frac{u^*Y_{j_0}}{w^*Z_{j_0}} = u^*Y_{j_0} \quad (22)$$

مقدار بهینه تابع هدف در (۲۱) برابر با $v^*X_{j_0} - u^*Y_{j_0} \geq 0$ است. واحد j_0 در هر دو مرحله، کارا است و در نتیجه به طور کلی، کارا است، اگر و فقط اگر، مقدار بهینه تابع هدف، صفر باشد. در غیر این صورت به طور کلی، ناکارا است. در واقع، اگر $v^*X_{j_0} - u^*Y_{j_0} = 0$ باشد، آنگاه با توجه به اینکه به ازای هر j داریم $v^*X_j \leq wZ_j \leq vX_{j_0}$ و $uY_j \leq wZ_j \leq uY_{j_0}$ در نتیجه $v^*X_{j_0} = u^*Y_{j_0}$ و $wZ_{j_0} = u^*Y_{j_0} = 1$ برقرار است یعنی $\hat{e}_{j_0}^1 = 1, \hat{e}_{j_0}^2 = 1$ است. مدل (۲۱)، اندازه مستقیمی را از کارایی کلی ارائه نمی‌دهد، این امر در مدل ضربی (۷) و مدل جمعی (۱۳) نیز مشاهده می‌شود ولی میان واحدهای کارا و ناکارای کلی، تمایز قائل می‌شود که این ویژگی، ارتباط نزدیکی با مدل DEA جمعی استاندارد دارد. با این حال، برابر با محدودیت نرمال‌سازی $wZ_{j_0} = 1$ در اندازه‌های بینابینی در رابطه (۲۱) است که همانطور که در رابطه (۲۲) آمده است، امکان استنباط امتیازهای کارایی هر یک از مراحل را فراهم می‌کند و راهکاری است که بدون نیاز به در نظر گرفتن وزن برای دو مرحله، ما را قادر به ارزیابی همزمان کارایی دو مرحله می‌کند. از این رو، رویکرد ما برخلاف رویکرد چن و همکاران (۲۰۰۹) که برای وزن‌های درون‌زا در مراحل انفرادی، مرحله دوم را به مرحله اول ترجیح می‌دهد، یک رویکرد "خنثی" است.

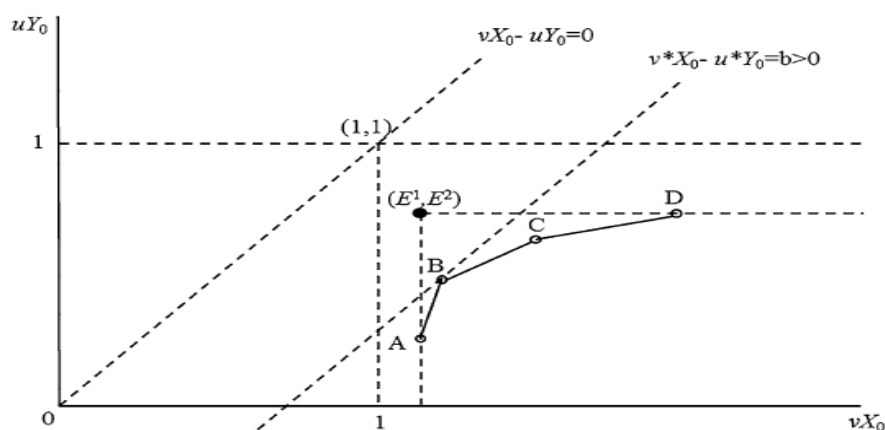
جواب بهینه (v^*, w^*, u^*) مدل (۲۱)، یک جواب بهینه پارتو از MOLP (۲۰) است در حالی که بردار بهینه $(v^*X_{j_0}, u^*Y_{j_0})$ یک نقطه نامغلوب در مرز پارتو در فضای توابع هدف (۲۰) است. این نتیجه مستقیم از قضیه Geoffrion (۱۹۶۸) است، که بیان می‌کند: x^* با توجه بهیک مدل LP چندهدفه $\{ \min_j g_j(x), \quad j = 1, \dots, n, x \in X, x \geq 0 \}$ یک جواب بهینه پارتو (کارا) برای این مدل است اگر و فقط اگر $\{ t_j > 0, \quad j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n t_j = 1 \}$ به گونه‌ای وجود داشته باشند که x^* برای مدل LP اسکالر $\{ \min \sum_{j=1}^n t_j g_j(x) / x \in X, x \geq 0 \}$ بهینه باشد. با بهره‌گیری از این ویژگی، می‌توان مرز پارتو را به طور

دقیق بررسی کرد و با حل مدل زیر به ازای مقادیر مختلف پارامتر t با $0 < t < 1$ ، جواب‌های بهینه پارتو ی جایگزین را به دست آورد:

$$\min t v X_{j_0} - (1 - t) u Y_{j_0} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \\ w Z_{j_0} &= 1 \\ w Z_j - v X_j &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ u Y_j - w Z_j &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ v &\geq 0, w \geq 0, u \geq 0 \end{aligned}$$

توجه کنید که مدل (۲۳) در مرز پارتو، فقط نقاط اکسترمم را ارائه می‌دهد. همچنین توجه کنید که همان نقطه بهینه پارتو را می‌توان برای محدوده‌ای از مقادیر t به دست آورد که به اصطلاح محدوده بی‌تفاوتی نامیده می‌شود، بنابراین، جواب به دست آمده از مدل (۲۱) از طریق تابع هدف اسکالر بی‌وزن آن نیز می‌تواند با دادن اولویت‌های (وزن‌های) متفاوت به دو عبارت تابع هدف در محدوده بی‌تفاوتی آنها، به دست آید. شکل ۲ در بخش زیر، یک نمایش کلی از فضای توابع هدف $MOLP$ (۲۰) برای یک واحد ارزیابی شده (X_0, Z_0, Y_0) است. در واقع، این صفحه در فضای سه بعدی (vX, wZ, uY) قرار دارد که در $wZ_0 = 1$ به محور عمودی wZ است. نقطه (E^1, E^2) ، نقطه ایده‌آل را نشان می‌دهد، در حالی که نقاط A, B, C, D نقاط اکسترمم بهینه پارتو ی جایگزین هستند که توسط مدل پارامتری (۲۳) و به ازای مقادیر مختلف پارامتر t به دست می‌آیند. خط خمیده $ABCD$ ، مرز پارتو را در فضای توابع هدف نشان می‌دهد. خط نقطه چین که از نقطه B می‌گذرد، دارای شیب ۱ است و تابع هدف مدل (۲۱) را نشان می‌دهد که در زمان مینیمم شدن برای جواب بهینه (v^*, w^*, u^*) ، مقدار غیرمنفی $v^* X_0 - u^* Y_0 = b > 0$ می‌گیرد و نقطه B را در مرز پارتو قرار می‌دهد.



شکل ۲: مرز پارتو ی $MOLP$ (۲۰) و جواب بهینه (۲۱)

اگرچه احتمال وقوع این امر در عمل زیاد نیست ولی نقطه بهینه پارتو ی حاصل از مدل (۲۱) و در نتیجه، امتیازهای کارایی دو مرحله ممکن است منحصر به فرد نباشند. این شامل حالتی است که بخشی از مرز پارتو دارای شیب ۱ است، یعنی زمانی که موازی با خط تابع هدف است. به عنوان مثال، اگر بخش BC تعریف شده توسط دو نقطه بهینه پارتو ی متوالی B و C ، موازی با خط تابع هدف باشد، آنگاه B و C و هر ترکیب محدب آنها با توجه به مدل (۲۱)، بهینه خواهند بود. منحصر به فرد بودن نقطه پارتو ی بهینه $(v^* X_{j_0}, u^* Y_{j_0})$ و بنابراین، منحصر به فرد بودن امتیازهای کارایی بهینه دو مرحله به دست آمده از مدل (۲۱) با به حداقل رساندن $v X_0$ و به حداکثر رساندن $u Y_0$ مشروط به محدودیت‌های (۲۱) به اضافه محدودیت $v X_{j_0} - u Y_{j_0} \leq v^* X_{j_0} - u^* Y_{j_0}$ قابل آزمایش است.

مدل (۲۱) معادل با یافتن جواب بهینه است که نقطه‌ای در مرز پارتو را در حداقل مجموع انحرافات $1 - u Y_{j_0}$ و $v X_{j_0} - 1$ (از L_1 نرم) $(v X_{j_0}, u Y_{j_0})$ از نقطه مرزی $(1, 1)$ در فضای تابع هدف قرار می‌دهد. در مرحله بعد، از نرمال غیروزن‌نیچبیشف (L_∞ نرم)

استفاده می‌کنیم تا با به حداقل رساندن حداکثر انحرافات $vX_{j_0} - E_{j_0}^1$ و $E_{j_0}^2 - uY_{j_0} (vX_{j_0}, uY_{j_0})$ از نقطه ایده‌آل $(E_{j_0}^1, E_{j_0}^2)$ ، یک جواب منحصر به فرد را در مرز پارتو قرار دهیم. این امر توسط مدل minmax زیر انجام می‌شود که δ بزرگ‌ترین انحراف را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \min & \delta \\ \text{s.t.} & \\ & vX_{j_0} - \delta \leq E_{j_0}^1 \\ & uY_{j_0} + \delta \geq E_{j_0}^2 \\ & wZ_{j_0} = 1 \\ & wZ_j - vX_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & uY_j - wZ_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & v \geq 0, w \geq 0, \quad u \geq 0, \delta \geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

حل مدل (۲۴) به معنای جستجوی جوابی است که انحراف‌ها از نقطه ایده‌آل در آن، با یکدیگر برابر باشند و به حداقل برسند. همان‌طور که در شکل ۳ نشان داده شده است، جواب minmax برابر با D است که محل تقاطع مرز پارتو و شعاعی از نقطه ایده‌آل (E^1, E^2) با شیب (-1) است. مزیت اصلی مدل (۲۴) نسبت به مدل (۲۱) و مدل‌های تجزیه (۷) و (۱۳) این است که یک نقطه منحصر به فرد و نه لزوماً اکسترمم (راسی) را در مرز پارتو ارائه می‌دهد یعنی امتیازهای کارایی برای دو مرحله، منحصر به فرد هستند. زمانی که یک جواب بهینه (v^*, w^*, u^*) مدل (۲۴) به دست می‌آید، امتیازهای کارایی مرحله‌ای برای واحد j_0 ، مشابه با امتیازهای کارایی رابطه (۲۲) است.

مدل minmax پارامتریک زیر با در نظر گرفتن فاصله وزنی چپ‌بیش، به دنبال جوابی می‌گردد که انحرافات وزنی $t(vX_{j_0} - E_{j_0}^1)$ و $(1-t)(E_{j_0}^2 - uY_{j_0})$ با $0 < t < 1$ در آن، با یکدیگر برابر باشند و به حداقل برسند.

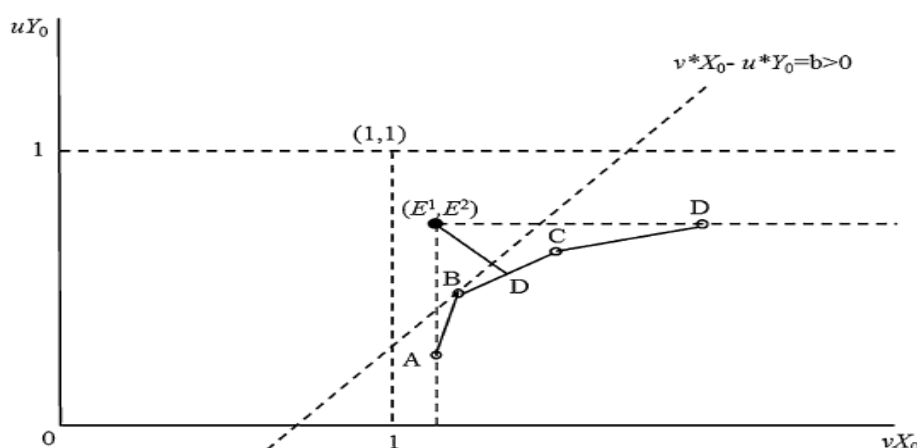
$$\text{Min} \delta \quad (25)$$

s.t.

$$\begin{aligned} & t v X_{j_0} - \delta \leq t E_{j_0}^1 \\ & (1-t) u Y_{j_0} + \delta \geq (1-t) E_{j_0}^2 \\ & w Z_{j_0} = 1 \\ & w Z_j - v X_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & u Y_j - w Z_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & v \geq 0, w \geq 0, \quad u \geq 0, \delta \geq 0 \end{aligned}$$

فرمول minmax (۲۵) فوق بر خلاف مدل پارامتریک (۲۳)، تغییرات پیوسته‌ای را در محل نقطه بهینه پارتو برای تغییرات پیوسته پارامتر t ایجاد می‌کند.

بنابراین، جواب بهینه (۲۵) به هر مجموعه وزنی که یک مرحله را بر مرحله دیگر اولویت می‌دهد، پاسخ دقیقی را ارائه می‌دهد. از این نظر، مدل minmax بدون وزن (۲۴) با مفهوم «بی‌طرفی» در ارزیابی‌های کارایی، نسبت به مدل (۲۱)، به طور کاراتری همسو می‌شود و بنابراین، امتیازهای کارایی متعادل‌تری را برای دو مرحله فراهم می‌کند.



شکل ۳: مرز پارتوی MOLP (۲۰) و جواب بهینه مدل (۲۴)

۳-۱-۱-۳- تجمیع کارایی‌های انفرادی

همانطور که در لیانگ و همکاران (۲۰۰۸) مشاهده شد. منطقی است که کارایی کلی فرآیند دو مرحله ای را به عنوان میانگین (میانگین حسابی) کارایی‌های دو مرحله انفرادی تعریف کنیم.

همچنین، کوک و هابابو^۸ (۲۰۰۱)، اگر چه مشکل اندازه "مجموع" کارایی را به طور مستقیم برطرف نساختند ولی استدلال کردند که این اندازه تجمیعی (کارایی کلی) باید میانگین امتیازهای مؤلفه باشد. کارایی کلی واحد j_0 در این استدلال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{e}_{j_0}^o = \frac{1}{2}(\hat{e}_{j_0}^1 + \hat{e}_{j_0}^2)$$

از آنجایی که کارایی‌های مرحله‌ای، بدون فرض هستند، یعنی ارزیابی آنها به هیچ تعریف پیشینی از کارایی کلی بستگی ندارد، می‌توان آنها را به صورت ضرب تجمیع کرد تا کارایی کلی را به صورت زیر به دست آورد:

$$\hat{e}_{j_0}^o = \hat{e}_{j_0}^1 \cdot \hat{e}_{j_0}^2 = \frac{1}{v^*X_{j_0}} \cdot u^*Y_{j_0} = \frac{u^*Y_{j_0}}{v^*X_{j_0}}$$

در بخش بعدی، کارایی‌های مرحله‌ای و کارایی‌های کلی حاصل از رویکرد ما را با کارایی‌های به دست آمده از روش‌های تجمعی و ضریبی ارائه شده در بخش قبل مقایسه می‌کنیم. اگرچه امتیازهای کارایی کلی \hat{e}^0 و e^0 که به ترتیب با روش تجمیع ما (میانگین حسابی ساده) و مدل تجزیه تجمعی (۱۳) به دست می‌آیند، به دلیل وزن‌های درون‌زای فرض شده برای دو مرحله در مدل دومی، قابل مقایسه نیستند، ولی در مورد مدل تجزیه ضریبی (۷)، موارد زیر برقرار است:

۳-۲- بازده به مقیاس متغیر

رویکرد ما امکان گسترش توسعه‌ها را تحت فرض بازده به مقیاس متغیر (VRS) فراهم می‌کند. در واقع، گونه VRS مدل (۲۱) در زمانی که گونه‌های VRS مدل‌های (۱۵) و (۱۶) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم، بدیهی است:

$$\min vX_{j_0} - d_1 - uY_{j_0} + d_2 \quad (26)$$

s.t.

$$wZ_{j_0} = 1$$

$$wZ_j - vX_j + d_1 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$uY_j - wZ_j - d_2 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v \geq 0, w \geq 0, u \geq 0$$

d_1, d_2 آزاد در علامت

رویکرد تجزیه‌جمعی چن و همکاران (۲۰۰۹) به شرایط VRS نیز قابل‌تعمیم است. ولی این موضوع برای مدل ضربی کائو و هوانگ (۲۰۰۸)، صادق نیست. کائو و هوانگ (۲۰۱۱) بعد از مدتی، رویکردی را برای تجزیه کارایی‌های فنی و مقیاسی پیشنهاد کردند. با این حال، شایان ذکر است که این اصل که امتیازهای کارایی VRS، کمتر از همتایان CRS آنها نیست، به طور کلی در مدل جمعیتی در مدل (۲۶) ما در بالا، برقرار نیست.

این بی‌نظمی را می‌توان به ماهیت متناقض اندازه‌های بینابینی نسبت داد که در دو مرحله، تفاسیر متفاوتی دارند. با این حال، با اضافه کردن محدودیت‌های $1/\hat{e}_{CRS}^1$ و $vX_{j_0} - d_1 \leq 1/\hat{e}_{CRS}^1$ و $uY_{j_0} - d_2 \geq \hat{e}_{CRS}^2$ در مدل (۲۶)، که \hat{e}_{CRS}^1 و \hat{e}_{CRS}^2 امتیازهای کارایی CRS به‌دست‌آمده از مدل (۲۱) هستند، این بی‌نظمی را برای واحدهایی که در آن مشاهده می‌شود و بدون تاثیر بر امتیاز کارایی سایر واحدها، اصلاح می‌کند.

۴- مثال تشریحی و آزمایش

رویکرد را در مورد ۲۴ شرکت بیمه غیرزندگی تایوانی اعمال می‌کنیم که ابتدا در کائو و هوانگ (۲۰۰۸) مورد مطالعه قرار گرفتند. نویسندگان، یک فرآیند تولید دو مرحله‌ای را با دو ورودی (هزینه‌های عملیاتی- $X1$ و هزینه‌های بیمه‌ای- $X2$)، دو اندازه بینابینی (حق بیمه‌های صادره مستقیم- $Z1$ و حق بیمه‌های اتکایی- $Z2$) و دو خروجی نهایی (سود بیمه‌گری- $Y1$ و سود سرمایه‌گذاری- $Y2$) را در نظر می‌گیرند. جدول ۱ مجموعه داده‌ها را نشان می‌دهد. جدول ۲ (ستون‌های ۲-۵) امتیازهای کارایی به‌دست آمده از مدل (۲۱) مابرای روی داده‌های جدول ۱ و امتیازهای کارایی به‌دست‌آمده توسط مدل (۲۴) (ستون‌های ۸-۱۲) ما را نشان می‌دهد. ستون‌های ۶-۷، مقادیر ایده‌آل vX_{j_0} و uY_{j_0} را در LP دو هدفه (۲۰) ارائه می‌کنند.

جدول ۱: مجموعه داده‌های شرکت‌های بیمه غیرزندگی تایوانی (منبع: کائو و هوانگ ۲۰۰۸)

Y2	Y1	Z2	Z1	X2	X1	DMU
681,687	984,143	856,735	7,451,757	673,512	1,178,744	1
834,754	1,228,502	1,812,894	10,020,274	1,352,755	1,381,822	2
658,428	293,613	560,244	4,776,548	592,790	1,177,494	3
177,331	248,709	371,863	3,174,851	594,259	601,320	4
3,925,272	7,851,229	1,753,794	37,392,862	3,531,614	6,699,063	5
415,058	1,713,598	952,326	9,747,908	668,363	2,627,707	6
439,039	2,239,593	643,412	10,685,457	1,443,100	1,942,833	7
622,868	3,899,530	1,134,600	17,267,266	1,873,530	3,789,001	8
264,098	1,043,778	546,337	11,473,162	950,432	1,567,746	9
554,806	1,697,941	504,528	8,210,389	1,298,470	1,303,249	10
18,259	1,486,014	643,178	7,222,378	672,414	1,962,448	11
909,295	1,574,191	1,118,489	9,434,406	650,952	2,592,790	12
223,047	3,609,236	811,343	13,921,464	1,368,802	2,609,941	13
332,283	1,401,200	465,509	7,396,396	988,888	1,396,002	14
555,482	3,355,197	749,893	10,422,297	651,063	2,184,944	15
197,947	854,054	402,881	5,606,013	415,071	1,211,716	16
371,984	3,144,484	342,489	7,695,461	1,085,019	1,453,797	17
163,927	692,731	995,620	3,631,484	547,997	757,515	18
46,857	519,121	483,291	1,141,950	182,338	159,422	19
26,537	355,624	131,920	316,829	53,518	145,442	20
6,491	51,950	40,542	225,888	26,224	84,171	21
4,181	82,141	14,574	52,063	10,502	15,993	22
18,980	0.1	49,864	245,910	28,408	54,693	23
16,976	142,370	644,816	476,419	235,094	163,297	24

به منظور مقایسه، در جدول ۳ نتایج به‌دست آمده از مدل تجزیه‌جمعی (۱۳) چن و همکاران (۲۰۰۹) را به همراه وزن‌ها (ستون‌های ۲-۶) و نتایج مربوطه به دست‌آمده از مدل تجزیه ضربی (۷) کائو و هوانگ (۲۰۰۸) (ستون‌های ۷-۹) ارائه می‌دهیم. اگرچه می‌توان تنها چند تفاوت اندک را در بین امتیازهای کارایی‌تفرادی به دست‌آمده از مدل (۲۱) و امتیازهای به دست‌آمده از

مدل (۱۳) و (۷) مشاهده کرد، ولی به طور کلی، رویکرد ما، امتیازهای کاراییکسانی را برای مراحل انفرادی و روش دیگر به دست نمی‌آورد. به عنوان مثال، امتیازهای کارایی مرحله ۱ و مرحله ۲ برای DMU 16 (رییس شرکت آلیانز)، به طور قابل توجهی با امتیازهای به دست آمده از روش تجزیه‌جمعی، تفاوت دارد. با توجه به نتایج به دست آمده از روش تجزیه ضریبی، امتیازهای کاراییانفرادی برای ۹ واحد از ۲۴ واحد، متفاوت است. آزمایش‌های ما با مجموعه داده‌های مختلفی (۱۰۰ مجموعه داده برگرفته از یک توزیع یکنواخت، با ۵۰ DMU، ۲ ورودی خارجی، ۳ اندازه بینابینی و ۲ خروجی نهایی) که به طور تصادفی تولید شده‌اند، تمایز قابل توجهی را در نتایج کارایی بین سه روش نشان داد.

شکل ۴، درصد واحدهایی را در هر اجرا نمایش می‌دهد که با توجه به مدل (۲۱) و مدل جمعی (۱۳)، امتیازهای کارایی مرحله‌ای متفاوتی را نشان می‌دهد. محدوده تفاوت‌ها از ۰ تا ۸۲ درصد، متغیر است و تنها در یک مورد، امتیازهای کارایی برایتمام واحدها، یکسان بود. به طور مشابه، شکل ۵ درصد واحدهایی را در هر اجرا نشان می‌دهد که با توجه به مدل (۲۱) و مدل ضریبی (۷)، امتیازهای کاراییانفرادی متفاوتی را نشان داده‌اند. محدوده این تفاوت‌ها از ۲۳ تا ۹۷ درصد، متغیر است. همچنین هیچ موردی با امتیازهای کاراییکسان برای همه واحدها، مشاهده نشد. برای امتیازهای به دست آمده از مدل (۲۱)، می‌توان مشاهده کرد که $e^1 \geq \hat{e}^1$ و $e^2 \leq \hat{e}^2$ که در آن، امتیازهای کارایی حاصل از مرحله ۱ و مرحله ۲ توسط مدل‌هایجمعی ضریبی هستند. این روابط در طول آزمایش‌های ما که در بالا ذکر شد، کاملاً تأیید می‌شوند. شواهد تجربی در مورد مدل تجزیه‌جمعی (۱۳) نشان می‌دهد که ارزیابی‌های کارایی، مرحله دوم را ترجیح می‌دهند. همانطور که قبلاً ذکر شد، با اشاره به نتایج حاصل از مدل‌های (۲۱) و (۱۳)، تمام واحدها به جز DMU 16 امتیازهایانفرادیکسانی را برای دو مرحله نشان می‌دهند. با حل مدل (۲۳) به ازای مقادیر مختلف پارامتر t ; $0 < t < 1$ ، می‌توان توجیه دقیق‌تری از شباهت‌ها و تفاوت‌ها نتایج به دست آورد. جدول ۴، به ازای تعداد محدودی از DMUها، امتیازهای کارایی متفاوت با محدوده‌های بی‌تفاوتی پارامتر t را نشان می‌دهد. به دلیل محدودیت مکانی، اکثر DMUهایی که نشان دهنده نتایج یکسان برای تمام مدل‌ها هستند را حذف کرده‌ایم. ستون ۲، محدوده‌های بی‌تفاوتی پارامتر t را نشان می‌دهد که امتیازهای کارایی در آن، یکسان باقی می‌مانند. ستون‌های ۴ و ۵، امتیازهای کارایی را برای دو مرحله ارائه می‌کنند که در راستای t -محدوده متناظر، پشتیبانی می‌شوند. این امتیازها مربوط به نقاط اکسترمم متوالی (راسی) در مرز پارتو هستند که توسط مدل (۲۳) ایجاد شده‌اند. ستاره‌های سه ستون آخر، به ترتیب امتیازهای کارایی جایگزین به دست آمده از مدل تجزیه جمعی چن و همکاران (۲۰۰۹)، مدل ما (۲۱) و مدل ضریبی (۷) کائو و هوانگ (۲۰۰۸) را نشان می‌دهند. ستون ۳، وزن‌های درون‌زای t^2 مورد نظر برای مرحله دوم در مدل (۱۳) را نشان می‌دهد. با توجه به دلایلی که در انتهای بخش ۲ توضیح داده شد و از آنجایی که رابطه (۲۴) یک مدل ترکیب و نه تجزیه است، اثر تغییر پارامتر t ، به صورت رابطه کامل با وزن t^2 تفسیر می‌شود. حال، امتیازهای کارایی همزمان حاصل از مدل‌های (۱۳) و (۲۱)، برایتمام واحدها به جز یک DMU 16 می‌توانند به طور دقیق با این واقعیت توجیه شوند که t -محدوده پشتیبانی، شامل هر دو مقدار وزن در نظر گرفته شده توسط مدل (۱۳) برای $t^2 = 0.5$ است که ویژگی‌ی طرف بودن (بدون وزن بودن) مدل (۲۱) را منعکس می‌کند. در مورد DMU 16، t -محدوده که از امتیازهای کارایی حاصل از مدل (۱۳) پشتیبانی می‌کند، شامل مقدار پارامتر $t = 0.5$ نمی‌شود که دقیقاً منبع تمایز در نتایج برای DMU 16 است. همچنین، جدول ۳ نشان می‌دهد که نسخه پارامتری مدل (۲۱) ما می‌تواند امتیازهای کاراییانفرادی حاصل از هر دو روش تجزیه‌جمعی و ضریبی را به طور کارا تعیین کند.

جدول ۲: نتایج حاصل از مدل‌های (۲۱) و (۲۴)

DMU	e^{-1}	e^{-2}	$e^0 = (e^{-1} \cdot e^{-2})/2$	$e^0 = e^{-1} \cdot e^{-2}$	E_1	E_2	d	e^{-1}	e^{-2}	$e^0 = (e^{-1} \cdot e^{-2})/2$	$e^0 = e^{-1} \cdot e^{-2}$
1	0.9926	0.7045	0.8485	0.6992	0.7134	1.0075	0.0079	0.9848	0.7054	0.8451	$e^0 = e^{-1} \cdot e^{-2}$
2	0.9985	0.6257	0.8121	0.6248	0.6275	1.0015	0.0014	0.9971	0.6260	0.8116	$e^0 = (e^{-1} \cdot e^{-2})/2$
3	0.6900	1	0.8450	0.6900	11.4492		0	0.6900	1	0.8450	$e^0 = (e^{-1} \cdot e^{-2})/2$
4	0.7243	0.4200	0.5722	0.3042	0.4323	1.3805	0.0121	0.7181	0.4202	0.5692	$e^0 = (e^{-1} \cdot e^{-2})/2$
5	0.8307	0.9233	0.8770	0.7670	11.1940		0.0543	0.8011	0.9457	0.8734	$e^0 = (e^{-1} \cdot e^{-2})/2$
6	0.9606	0.4057	0.6831	0.3897	0.4057	1.0377	0.0019	0.9619	0.4037	0.6828	$e^0 = (e^{-1} \cdot e^{-2})/2$
7	0.7521	0.3522	0.5521	0.2649	0.5378	1.3296	0.1352	0.6827	0.4026	0.5426	$e^0 = (e^{-1} \cdot e^{-2})/2$
8	0.7256	0.3780	0.5518	0.2743	0.5113	1.3782	0.1038	0.6748	0.4076	0.5412	$e^0 = (e^{-1} \cdot e^{-2})/2$



0.2192	0.5880	0.2323	0.9437	0.0597	0.2920	1	0.2233	0.6116	0.2233	1	9
0.4391	0.6721	0.5597	0.7845	0.1139	0.6736	1.1607	0.4660	0.7012	0.5408	0.8615	10
0.1570	0.4587	0.2276	0.6899	0.0991	0.3267	1.3504	0.1507	0.4679	0.2066	0.7292	11
0.7596	0.8798	0.7596	1	0	0.7596	1	0.7596	0.8798	0.7596	1	12
0.2073	0.4923	0.3052	0.6794	0.2383	0.5435	1.2335	0.1970	0.5269	0.2431	0.8107	13
0.2861	0.5500	0.4222	0.6777	0.0956	0.5178	1.3800	0.2710	0.5493	0.3740	0.7246	14
0.5976	0.7874	0.6376	0.9371	0.0671	0.7047	1	0.6138	0.8069	0.6138	1	15
0.3191	0.6234	0.3597	0.8871	0.0250	0.3847	1.1023	0.3044	0.6214	0.3356	0.9072	16
0.3504	0.5925	0.6183	0.5668	0.3817	1	1.3825	0.3325	0.5914	0.4597	0.7232	17
0.2565	0.5513	0.3335	0.7691	0.0401	0.3737	1.2602	0.2588	0.5599	0.3262	0.7935	18
0.4104	0.7041	0.4120	0.9962	0.0038	0.4158	1	0.4112	0.7056	0.4112	1	19
0.5216	0.7238	0.6763	0.7712	0.2251	0.9014	1.0716	0.5465	0.7594	0.5857	0.9332	20
0.1984	0.5051	0.2668	0.7434	0.0127	0.2795	1.3324	0.1969	0.5064	0.2623	0.7505	21
0.5895	0.7948	1	0.5895	0	1	1.6963	0.5895	0.7948	1	0.5895	22
0.4135	0.6610	0.5079	0.8141	0.0520	0.5599	1.1764	0.4203	0.6707	0.4989	0.8426	23
0.1037	0.4761	0.1255	0.8267	0.2096	0.3351	1	0.0870	0.5435	0.0870	1	24

با توجه به مدل (۱۳)، این واقعیت که وزن داده‌شده به مرحله دوم، همیشه حداقل به اندازه وزن داده‌شده به مرحله اول یعنی $t_j^1 \leq t_j^2$ است، نشان می‌دهد که روش تجزیه‌جمعی، ارزیابی‌های کارایی برای مرحله‌های انفرادی را مغرضانه می‌سازد. بنابراین، امتیاز کارایی کلی نیز مغرضانه است. در واقع، اگرچه هر DMU در انتخاب مضرب‌های خود، آزاد است تا امتیاز کارایی خود را به حداکثر برساند ولی آزادی در انتخاب وزن‌های t^1 و t^2 ، از نظر ساختاری توسط $t_j^2 \leq t_j^1$ محدود شده است. مورد واحد #3 در جدول‌های ۲ و ۳، گواه این امر است. با انتخاب وزن‌های $t^1 = 0.592$ و $t^2 = 0.408$ برایدو مرحله، امتیازهای کارایی‌های مرحله‌ای و کارایی کلی‌حاصل از روش تجزیه‌جمعی به ترتیب برابر با $e^1 = 0.690$ و $e^0 = 0.817$ (= e^2) و $e^0 = 0.817$ (= e^2) و $e^1 = 0.690$ هستند. با استفاده از مدل (۲۱) خود، کارایی‌های مرحله‌ای یکسانی را به دست می‌آوریم. چنین امری به دلیل این واقعیت است که این امتیازها به ازای هر مقدار از پارامتر $t \in (0,1)$ در مدل (۲۳) حفظ می‌شوند (جدول ۴ را ببینید). با این حال، در نظر گرفتن میانگین ساده (بدون وزن) امتیازهای انفرادی یکسان، منجر به یک امتیاز کارایی کلی 0.845 می‌شود که بزرگ‌تر از کارایی کلی‌بهنه‌حاصل از روش تجزیه‌جمعی است. همین امر برای واحدهای #5 و #22 نیز صدق می‌کند.

با توجه به نتایج حاصل از مدل minmax (۲۴)، می‌توان مشاهده کرد که امتیازهای کارایی مراحل انفرادی، نسبت به سایر مدل‌ها، متعادل‌تر است. این واقعیت که سه واحد ۱۲، ۲۲ و تمام مدل‌ها، امتیازهای کارایی یکسانی را برای دو مرحله نشان می‌دهند، با این واقعیت توجیه می‌شود که نقطه ایده‌آل برای این واحدها، قابل دستیابی است و در نتیجه مرز پارتو در این نقطه واحد، تبه‌گن می‌شود. شکل ۶، مرز پارتوی ABDE را نشان می‌دهد که توسط مدل (۲۳) برای واحد ۱۱ ایجاد شده است، نقطه بهینه پارتوی B(1.3713, 0.2066) از مدل (۲۱) به دست آمده است که امتیازهای کارایی مرحله‌ای بهینه (0.7292, 0.2066) را ارائه می‌کند. همچنین نقطه بهینه پارتوی C(1.4495, 0.2276) که از مدل (۲۴) به دست آمده است، کارایی‌های مرحله‌ای بهینه منحصر به فرد (0.6899, 0.2276) را ارائه می‌دهد.

جدول ۳: نتایج مدل‌های (۱۳) و (۷)

e^0	e^2	e^1	t^2	t^1	E^0	e^2	e^1	
0.6992	0.7045	0.9926	0.498	0.502	0.8491	0.7045	0.9926	1
0.6248	0.6257	0.9985	0.500	0.500	0.8122	0.6257	0.9985	2
0.6900	1	0.6900	0.408	0.592	0.8166	1	0.6900	3
0.3042	0.4200	0.7243	0.420	0.580	0.5965	0.4200	0.7243	4
0.7670	0.9233	0.8307	0.454	0.546	0.8727	0.9233	0.8307	5
0.3897	0.4057	0.9606	0.490	0.510	0.6887	0.4057	0.9606	6
0.2766	0.4124	0.6706	0.429	0.571	0.5804	0.3522	0.7521	7
0.2752	0.4150	0.6630	0.420	0.580	0.5795	0.3780	0.7256	8

0.2233	0.2233	1	0.500	0.500	0.6116	0.2233	1	9
0.4660	0.5408	0.8615	0.463	0.537	0.7131	0.5408	0.8615	10
0.1639	0.2534	0.6468	0.422	0.578	0.5088	0.2068	0.7291	11
0.7596	0.7596	1	0.500	0.500	0.8798	0.7596	1	12
0.2078	0.3093	0.6720	0.448	0.552	0.5565	0.2431	0.8107	13
0.2886	0.4309	0.6699	0.420	0.580	0.5773	0.3740	0.7246	14
0.6138	0.6138	1	0.500	0.500	0.8069	0.6138	1	15
0.3202	0.3615	0.8856	0.470	0.530	0.6395	0.3615	0.8856	16
0.3600	0.5736	0.6276	0.420	0.580	0.6126	0.4597	0.7232	17
0.2588	0.3262	0.7935	0.442	0.558	0.5868	0.3262	0.7935	18
0.4112	0.4112	1	0.500	0.500	0.7056	0.4112	1	19
0.5465	0.5857	0.9332	0.483	0.517	0.7654	0.5857	0.9332	20
0.2008	0.2743	0.7321	0.429	0.571	0.5412	0.2623	0.7505	21
0.5895	1	0.5895	0.371	0.629	0.7418	1	0.5895	22
0.4203	0.4989	0.8426	0.457	0.543	0.6854	0.4989	0.8426	23
0.1348	0.3145	0.4287	0.500	0.500	0.5435	0.0870	1	24

۵- استخراج مرز کارا

یکی از ویژگی‌های مدل‌های DEA دو مرحله‌ای که از ماهیت متناقض اندازه‌های بینابینی حاصل می‌شوند، این است که مانند مدل‌های DEA استاندارد، نمی‌توانند اطلاعات کافی را برای استخراج مرز کارا ارائه دهند. چن و همکاران (۲۰۱۰) مشاهده کردند که روش معمول تنظیم ورودی‌ها و خروجی‌ها توسط امتیازهای کارایی، نه در مدل‌های تجزیه جمعی و نه در مدل‌های تجزیه ضربی، برای به دست آمدن تصویر مرزی کافی نیستند. آنها برای حل این مشکل، یک مدل پوششی را پیشنهاد دادند که با تنظیم اندازه‌های بینابینی به عنوان متغیرهایی که باید تخمین زده شوند، مرز کارا را در چارچوب ضربی کائو و هوانگ (۲۰۰۸) تعیین کنند. این رویکرد، آنها را قادر به محاسبه سطوح جدیدی برای ورودی‌ها، خروجی‌ها و اندازه‌های بینابینی می‌کند که تصویرهای کارا را تشکیل می‌دهند. این تصویرها به ماهیت انتخاب‌شده بستگی دارند. در واقع، اگر یکماهیت ورودی در نظر گرفته شود، سطوح جدید ورودی‌ها و اندازه‌های بینابینی محاسبه می‌شوند، در حالی که سطوح اصلی خروجی‌ها حفظ می‌شوند. بر این اساس، با فرض ماهیت خروجی، سطوح جدیدی از خروجی‌ها و اندازه‌های بینابینی به دست می‌آیند که سطوح ورودی اولیه را حفظ می‌کنند. با این حال، سطوح اندازه‌های بینابینی در این دو مورد، به طور اساسی متفاوت است. متأسفانه، این تکنیک را نمی‌توان در چارچوب تجزیه‌جمعی اعمال کرد. چن و همکاران (۲۰۱۳) نشان دادند که فرم‌های پوششی و ضربی، دو نوع مدل DEA شبکه‌ای هستند که از مفاهیم متفاوتی از کارایی استفاده می‌کنند. اولی به طور صریح، براساس مجموعه امکان تولید، توسعه یافته است در حالی که دومی تحت کارایی نسبی DEA استاندارد است. دوگانگی DEA شبکه‌ای برخلاف DEA استاندارد، ممکن است منجر به یکزوج خاص از مدل‌های ضربی پوششی شبکه‌ای نشود. از این رو چن و همکاران (۲۰۱۰، ۲۰۱۳) پیشنهاد کردند که مدل‌های ضربی فقط باید برای تخمین امتیازهای کارایی استفاده شوند، در حالی که فرم‌های پوششی اصلاح‌شده باید برای تعیین تصویرهای مرزی DMUهای ناکارا استفاده شوند.

در ادامه، فرم پوششی مدل (۲۱) را فرموله می‌کنیم و از آن به عنوان مبنایی برای استخراج مرز کارای فرآیند دو مرحله‌ای استفاده می‌کنیم. بنابراین مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$g_{j_0} = \min v X_{j_0} - u Y_{j_0} \quad (27)$$

s.t.

$$w Z_{j_0} = 1$$

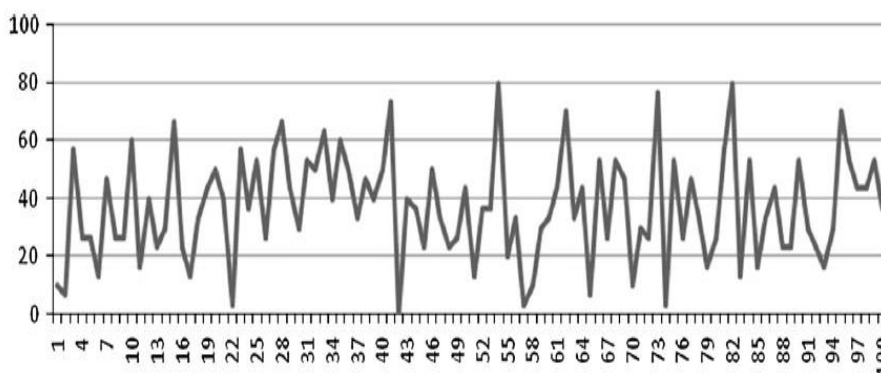
$$-\hat{w} Z_{j_0} = -1$$

$$-w Z_j + v X_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

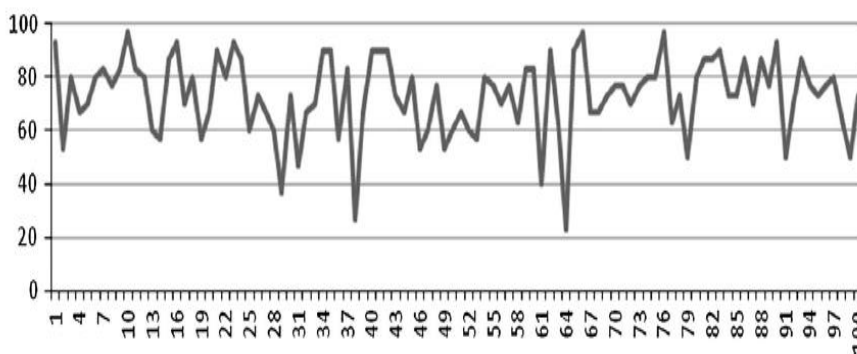
$$-u Y_j + \hat{w} Z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$w - \hat{w} = 0$$

$$v \geq 0, w \geq 0, \hat{w} \geq 0, u \geq 0$$



شکل ۴: درصد واحدهایی که کارایی‌های مرحله‌ای مختلف را نشان می‌دهند: مدل (۲۱) در برابر مدل (۱۳)



شکل ۵: درصد واحدهایی که کارایی‌های مرحله‌ای مختلف را نشان می‌دهند: مدل (۲۱) در برابر مدل (۷)

مدل (۲۷) کاملاً معادل با مدل (۲۱) است. تفاوت در فرمول‌بندی این است که در (۲۷) از متغیرهای وزنی مختلف برای اندازه‌های بینابینی در مرحله اول و دوم استفاده شده است که به‌طور صریح در آخرین محدودیت، با یکدیگر برابر می‌شوند. دوگان (۲۷) به صورت زیر است:

$$\max \theta_1 - \theta_2 \quad (28)$$

s.t.

$$X\lambda + s^- = X_0$$

$$Y\mu - s^+ = Y_0$$

$$Z\lambda \geq \theta_1 Z_0 + a$$

$$Z\mu \leq \theta_2 Z_0 + a$$

$$\lambda \geq 0, \mu \geq 0, s^+ \geq 0, s^- \geq 0$$

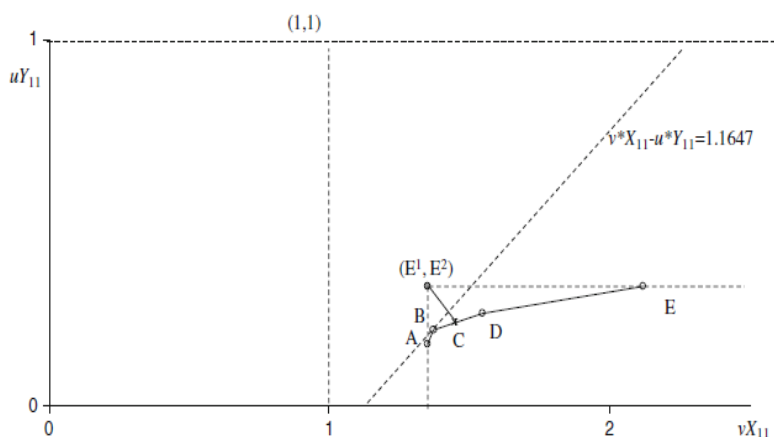
که θ_1 و θ_2 در آن، متغیرهای اسکالر آزاد در علامت و $a = (a_1, \dots, a_q)$ برداری از متغیرهای آزاد در علامت هستند. در جواب بهینه (۲۸)، $\theta_1^* - \theta_2^* = g_{j_0}^* \geq 0$ است که در آن، مقدار هدف بهینه در (۲۷)، یا به طور معادل، در مدل (۲۱) را نشان می‌دهد. اگر $\theta_1^* - \theta_2^* = g_{j_0}^* = 0$ باشد، آنگاه واحد ارزیابی شده به طور کلی، کارا است. اگر $\theta_1^* - \theta_2^* = g_{j_0}^* > 0$ باشد، واحد به طور کلی، ناکارا است. اگر نقش دوگان و متناقض اندازه‌های بینابینی و نحوه استخراج مدل اولیه (۲۱) را در نظر بگیریم، آنگاه تفسیر مدل (۲۸)، ساده است. با توجه به کارایی کلی، که مولفه‌های vX_{j_0}, uY_{j_0} آن در تابع هدف (۲۱) و (۲۷) ظاهر می‌شود، مدل به فرم جمعی بدون ماهیت است و می‌تواند میان واحدهای کلی کارایی واحدهای کلی ناکارایی، تمایز قائل شود. با توجه به مراحل انفرادی، مدل به طور همزمان شامل یکماهیت خروجی برای مرحله ۱ است که با محدودیت $Z\lambda \geq \theta_1 Z_0 + a$ بیان می‌شود و همچنین شامل یکماهیت ورودی برای مرحله ۲ است که توسط محدودیت $Z\mu \leq \theta_2 Z_0 + a$ بیان می‌شود. مدل (۲۸) یکتوصیف دو ارزیابی را از کارایی کلی واحد ارزیابی شده ارائه می‌کند، اما امتیازهای کارایی انفرادی را ارائه نمی‌دهد. با این حال، چنین محدودیتی (تحدیدی)، مشابه با محدودیت مربوطه مدل چن و همکاران (۲۰۱۰) با ماهیت پوششی است که برای روش تجزیه ضریبی توسعه یافته است. در واقع، هم مدل چن و همکاران (۲۰۱۰) و هم مدل (۲۸) ما، توصیفی از کارایی کلی را ارائه می‌دهند که از نظر ساختاری برای آن طراحی شده‌اند، یعنی اولی، امتیاز کارایی کلی را ارائه می‌دهد، زیرماهیت فرمولی دارد، در حالی که دومی، وضعیت کارایی کلی (کارا یا ناکارا) واحدهای مورد ارزیابی را ارائه می‌دهد، زیرا براساس یک فرمول جمعی بدون ماهیت مبتنی بر ورودی‌های خارجی و خروجی‌های نهایی است. این تشابه با این واقعیت تکمیل می‌شود که هیچیک از موارد فوق، امتیاز کارایی را برای مراحل انفرادی ارائه نمی‌دهند. اگرچه $\theta_1^* = 1/\hat{e}^1, \theta_2^* = \hat{e}^2$ شدنی هستند ولی احتمال کمی وجود دارد که مقادیر بهینه متغیرهای θ_1 و θ_2 با حل (۲۸) به دست آیند. در واقع θ_1^* و θ_2^* با تنظیم مقادیر a^* می‌توانند هر مقداری مانند $\theta_1^* - \theta_2^* = g_{j_0}^*$ را در جواب بهینه $(\lambda^*, \mu^*, \theta_1^*, \theta_2^*, a^*)$ (۲۸) بگیرند. زیرا متغیرهای θ_1, θ_2 و a ، آزاد در علامت و بی‌کران هستند. بنابراین، در صورتی که به $\theta_1 \geq 1$ و $\theta_2 \leq 1$ نیاز داشته باشیم که به ترتیب ماهیت خروجی و ماهیت ورودی فرض شده برای مرحله ۱ و مرحله ۲ را منعکس می‌کنند، آنگاه λ^* و μ^* بهینه و همچنین مقدار بهینه تابع هدف، تحت تأثیر قرار نمی‌گیرند.

جدول ۴: امتیازهای کارایی به دست آمده از مدل (۲۳) به ازای مقادیر مختلف پارامتر t

Model(7)	Model(21)	Model(13)	e^2	e^1	f^2	$t(\text{indifference ranges})$	DMU
*	*	*	1	0.690	0.408	(0,1)	3
			1	0.738		(0,0.3355)	5
*	*	*	0.923	0.831	0.454	[0.3355,0.9228]	
			0.806	0.837		[0.9228,1)	
			0.538	0.300		(0,0.048)	7
			0.502	0.382		[0.048,0.0528]	
			0.464	0.514		[0.0528,0.0575]	
			0.452	0.575		[0.0575,0.1368]	
*			0.412	0.671		[0.1368,0.2718]	
	*	*	0.352	0.752	0.429	[0.2718,1)	
			0.511	0.390		(0,0.0702)	8
			0.472	0.491		[0.0702,0.0907]	
			0.430	0.619		[0.0907,0.1192]	
*			0.415	0.663		[0.1192,0.2215]	
	*	*	0.378	0.726	0.420	[0.2215,1)	
			0.327	0.472		(0,0.1133)	11
*			0.253	0.647		[0.1133,0.2114]	
	*	*	0.207	0.729	0.422	[0.2114,0.651)	
			0.168	0.741		[0.651,1)	
			0.543	0.338		(0,0.1148)	13
			0.480	0.405		[0.1148,0.1355]	
			0.395	0.519		[0.1355,0.1647]	



*			0.309	0.672		[0.1647,0.2007]	
			0.280	0.729		[0.2007,0.211]	
	*	*	0.243	0.811	0.448	[0.211,1)	
			0.518	0.310		(0,0.0298)	14
			0.497	0.392		[0.0298,0.0334)	
			0.475	0.521		[0.0334,0.0371)	
			0.468	0.579		[0.0371,0.1367)	
*			0.431	0.670		[0.1367,0.3356)	
	*	*	0.374	0.725		[0.3356,1)	
			0.385	0.599		(0,0.0281)	16
			0.375	0.744		[0.0281,0.0504)	
			0.365	0.869		[0.0504,0.1406)	
*		*	0.362	0.886	0.470	[0.1406,0.491)	
	*		0.336	0.907		[0.491,1)	
			1	0.251		(0,0.1358)	17
			0.845	0.333		[0.1358,0.1461)	
			0.698	0.466		[0.1461,0.1564)	
			0.651	0.529		[0.1564,0.2071)	
*			0.574	0.628		[0.2071,0.3511)	
	*	*	0.460	0.723	0.420	[0.3511,0.9451)	
			0.455	0.723		[0.9451,1)	
			0.280	0.692		(0,0.0619)	21
*			0.274	0.732		[0.0619,0.2625)	
	*	*	0.262	0.751	0.429	[0.2625,1)	
			0.335	0.399		(0,0.1051)	24
*			0.314	0.429		[0.1051,0.1441)	
			0.107	0.908		[0.1441,0.1663)	
	*	*	0.087	1.000	0.500	[0.1663,1)	



شکل ۶: مرز پارتوی واحد ۱۱ و نقاط پارتوی به دست آمده از مدل‌های (۲۱) و (۲۴)

مشکل دیگر در مورد مدل (۲۸) این است که ماهیت‌های واگرایی تحمیل شده توسط محدودیت‌های $Z\mu \leq$ و $\theta_1 Z_0 + a$ در اندازه‌های بینابینی به آن اجازه نمی‌دهد که تصاویرهای صحیحی را از واحدهای ناکارا در مرز کارا ارائه دهد. چن و همکاران (۲۰۱۰) با حل یک مدل اصلاح شده، مشکل مشابهی را در توسعه‌های خود، برطرف ساختند که مقادیر مشاهده شده اندازه‌های بینابینی Z_0 در محدودیت‌های $Z\mu \leq Z_0$ و $Z\lambda \geq Z_0$ با متغیرهای جایگزین می‌شوند که تصویرهایی را برای اندازه‌های بینابینی نشان می‌دهند. در واقع، همانطور که این نوع اصلاح در تون و تسوتسویی^۹ (۲۰۰۹) مشخص شده است، این

^۹Tone and Tsutsui

مورد شامل اجراي حالت «اتصال آزاد» است. انتقال مدل پوششی پایه‌ای (۲۸) مابه شکلی که قادر به استخراج مرز کارا باشد نیز دقیقاً همان منطق را دارد: سمت راست دو محدودیت فوق، همزمان شوند. با تنظیم $\theta_1 = \theta_2 = 1$ یعنی مقداری که $\theta_1 \geq 1$ و $\theta_2 \leq 1$ به هم می‌رسند، سمت راست دو محدودیت آخر در (۲۸) تبدیل به $Z_0 + a = \tilde{Z}_0$ می‌شود که متغیرهای \tilde{Z}_0 همانند چن و همکاران (۲۰۱۰)، اهداف را برای اندازه‌های بینابینی نشان می‌دهند. در نتیجه، مدل زیر برای به دست آوردن تصویرهای واحدهای ناکارا در مرز، حل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \max e s^- + e s^+ \\ & \text{s.t.} \\ & X\lambda + s^- = X_0 \\ & Y\mu - s^+ = Y_0 \\ & Z\lambda \geq \tilde{Z}_0 \\ & Z\mu \leq \tilde{Z}_0 \\ & \lambda \geq 0, \mu \geq 0, s^+ \geq 0, s^- \geq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

که متغیرهای \tilde{Z}_0 در آن، آزاد در علامت، باقی می‌مانند. در واقع، از آنجایی که \tilde{Z}_0 به دلیل آخرین محدودیت، هرگز مقادیر منفی را نمی‌گیرد، محدودیت‌های طبیعی $\tilde{Z}_0 \geq 0$ اضافی هستند و در نتیجه، حذف می‌شوند. زمانی که هیچکدام بهینه $(\lambda^*, \mu^*, \tilde{Z}_0^*, s^{*-}, s^{+*})$ از مدل (۲۹) به دست می‌آید، در صورتی که $s^{+*} = s^{*-} = 0$ باشد واحد ارزیابی شده، به طور کلی کارا است. تصویرهای کارای واحدهای ناکارا به صورت زیر هستند:

$$\hat{X}_0 = X_0 - s^{*-}, \quad \hat{Y}_0 = Y_0 + s^{+*}, \quad \hat{Z}_0 = \tilde{Z}_0^*$$

بنابراین، یک DMU ناکارای (X_0, Z_0, Y_0) ، ر روی مرز کارا در نقطه $(\hat{X}_0, \hat{Z}_0, \hat{Y}_0)$ تصویرسازی می‌شود. مدل (۲۹) اکنون به فرم جمع‌محض است. در واقع، دوگان (۲۹) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \min v X_{j_0} - u Y_{j_0} \\ & \text{s.t.} \\ & -w Z_j + v X_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & -u Y_j + \hat{w} Z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & v \geq e \\ & u \geq e \\ & w - \hat{w} = 0 \\ & w \geq 0, \hat{w} \geq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

یا

$$\begin{aligned} & \min v X_{j_0} - u Y_{j_0} \\ & \text{s.t.} \\ & -w Z_j + v X_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & -u Y_j + w Z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & v \geq e \\ & u \geq e \\ & w \geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

جدول ۵، تصویرهای به دست آمده با اعمال مدل (۲۹) را نشان می‌دهد.

جدول ۵: تصویرهای به دست آمده از مدل (۲۹) برای شرکت های بیمه غیر زندگی تایوانی

DMU	X1	X2	Z1	Z2	Y1	Y2
1	1,178,744.00	673,512.00	6,574,261.72	1,405,802.31	6,321,322.37	681,687.00
2	1,381,822.00	1,282,484.97	9,984,108.87	2,701,675.41	14,883,490.16	834,754.00

658,428.00	5,222,222.92	1,173,093.25	6,301,206.75	592,790.00	1,177,494.00	3
348,724.99	6,851,140.78	1,215,574.75	4,342,422.69	566,085.63	601,320.00	4
3,925,272.00	30,095,254.05	7,179,671.93	36,299,271.58	3,531,614.00	6,699,063.00	5
458,645.09	9,010,659.25	1,598,730.82	5,711,178.98	668,363.00	1,160,508.24	6
953,173.33	18,726,288.14	3,322,542.01	11,869,185.17	1,443,100.00	1,942,833.00	7
1,285,656.65	25,258,340.80	4,481,502.04	16,009,361.92	1,873,530.00	3,253,093.02	8
647,990.87	12,730,595.02	2,258,746.45	8,068,966.39	950,432.00	1,567,746.00	9
755,796.41	14,848,570.42	2,634,531.66	9,411,391.65	1,226,885.07	1,303,249.00	10
461,424.97	9,065,273.56	1,608,420.85	5,745,794.88	672,414.00	1,167,542.17	11
909,295.00	6,005,636.18	1,127,326.43	9,356,387.29	650,952.00	2,563,321.18	12
939,301.42	18,453,757.03	3,274,187.74	11,696,448.21	1,368,802.00	2,376,711.46	13
662,195.73	13,009,667.34	2,308,261.30	8,245,849.34	988,888.00	1,396,002.00	14
555,482.00	8,126,418.64	1,456,357.91	6,454,920.94	651,063.00	1,467,228.98	15
284,830.66	5,595,856.36	992,853.88	3,546,792.34	415,071.00	720,706.14	16
715,570.46	14,058,281.15	2,494,313.31	8,910,486.74	1,085,019.00	1,453,797.00	17
365,046.81	7,171,803.41	1,272,468.84	4,545,666.61	547,997.00	757,515.00	18
92,453.99	1,816,374.92	322,273.26	1,151,263.40	150,080.66	159,422.00	19
36,725.20	721,512.80	128,015.58	457,312.68	53,518.00	92,925.67	20
17,995.47	353,543.70	62,728.06	224,084.75	26,224.00	45,533.89	21
7,092.16	139,334.46	24,721.64	88,313.63	10,502.00	15,993.00	22
19,494.18	382,987.70	67,952.21	242,747.09	28,408.00	49,326.07	23
94,701.23	1,860,524.74	330,106.62	1,179,246.65	153,728.61	163,297.00	24

وضعیت کارایی این پیش‌بینی‌ها با استفاده از مدل‌های (۲۱) و (۲۴) برای یک مجموعه داده تعمیم‌یافته تایید می‌شود که هم DMUهای اصلی (جدول ۱) و هم تصویرهای آنها (جدول ۵) را در بر می‌گیرد. در واقع، نتایج نشان دادند که تمام واحدهای تصویرسازی‌شده، در هر دو مرحله و همچنین از نظر کلی، کارا هستند، در حالی که امتیازهای کارایی واحدهای اصلی (اولیه) بدون تغییر باقی مانده است. این امر تایید می‌کند که رویکرد ما، اهداف بهبود در مرز کارا را به طور دقیق تعیین می‌کند. محاسبات خود را با افزودن تصویرهای حاصل از روش‌های دیگر در مجموعه داده‌های تعمیم‌یافته گسترش دادیم. تصویرهای چن و همکاران (۲۰۱۰) و همچنین تصویرهای حاصل از مدل DEA شبکه‌ای پوششی‌بدون ماهیت (چن و همکاران ۲۰۱۳) که اصلاحی از مدل اندازه مبتنی بر اسلک (SBM) تون و تسوتسویی (۲۰۰۹) استرا نیز به طور ویژه در نظر گرفتیم. نتایج نشان دادند که تمام تصویرها، صرف‌نظر از روشی که از آن استخراج می‌شوند، کارا هستند. این امر تایید می‌کند که مدل‌های (۲۱) و (۲۴) ما، وضعیت کارایی تصویرهای جایگزین به‌دست‌آمده از روش‌های دیگر را حفظ می‌کنند. شایان ذکر است که تصویرهای ما در زمان آزمایش با مدل‌های (۷) و (۱۳) نیز، کارا محسوب می‌شوند.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا یک رویکرد جدید برای ارزیابی کارایی‌های انفرادی و کلی در DEA دو مرحله‌ای را تحت فرض مشترک رابطه متوالی بین دو مرحله معرفی کردیم. رویکرد ما با ارائه امتیازهای کارایی منحصر به فرد و بی‌غرض برای دو مرحله، ضعف‌های شناخته شده در روش‌های تجزیه‌ی جمع‌ی و ضربی را به طور کارا برطرف می‌سازد. ابتدا براساس یک دیدگاه معکوس در تجمیع امتیازهای کارایی انفرادی، یعنی رویکرد ترکیب که برخلاف رویکرد تجزیه است، کارایی‌های انفرادی را برای دو مرحله تخمین می‌زنیم، سپس می‌توان آنها را به فرم جمع‌ی ضربی تجمیع کرد تا کارایی کلی را به دست آورد. رویکرد مدل‌سازی ما مبتنی بر انتخاب یک‌ماهیت خروجی برای مرحله اول و یک‌ماهیت ورودی برای مرحله دوم، با توجه به مدل‌های نسبی DEA استاندارد است. بدین ترتیب، اندازه‌های بینابینی به عنوان مبنایی برای برقراری ارتباط میان مدل‌های ارزیابی کارایی برای دو مرحله در یک برنامه‌ریزی خطی واحد استفاده می‌شوند. رویکرد پیشنهادی به طور مستقیم برای تناسب با شرایط VRS تعمیم یافته است. با اذعان به کمبودهای مشاهده شده برای مدل‌های DEA شبکه‌ای پوششی، روشی را برای استخراج مرز کارا در DEA دو مرحله‌ای ارائه کردیم که از شکل پوششی مدل ضربی پایه‌ای ما سرچشمه می‌گیرد.



منابع

- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30, 1078–1092.
- Castelli, L., Pesenti, R., & Ukovich, W. (2010). A classification of DEA models when the internal structure of the decision-making units is considered. *Annals of Operations Research*, 173, 207–235.
- Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functional. *Naval Research Logistics*, 9, 181–185.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429–444.
- Chen, Y., & Zhu, J. (2004). Measuring information technology's indirect impact on firm performance. *Information Technology and Management*, 5, 9–22.
- Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., & Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European Journal of Operational Research*, 196, 1170–1176.
- Chen, Y., Cook, W. D., & Zhu, J. (2010). Deriving the DEA frontier for two-stage DEA processes. *European Journal of Operational Research*, 202, 138–142.
- Chen, Y., Cook, W. D., Kao, C., & Zhu, J. (2013). Network DEA pitfalls: divisional efficiency and frontier projection under general network structures. *European Journal of Operational Research*, 226, 507–515.
- Cook, W. D., & Hababou, M. (2001). Sales performance measurement in bank branches. *Omega*, 29, 299–307.
- Färe, R., & Grosskopf, S. (1996). Productivity and intermediate products: a frontier approach. *Economics Letters*, 50, 65–70.
- Geoffrion, A. M. (1968). Proper efficiency and theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22, 618–630.
- Kao, C., & Hwang, S.-N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: an application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research*, 185, 418–429.
- Kao, C., & Hwang, S.-N. (2011). Decomposition of technical and scale efficiencies in two-stage production systems. *European Journal of Operational Research*, 211, 515–519.
- Liang, L., Cook, W. D., & Zhu, J. (2008). DEA models for two-stage processes: game approach and efficiency decomposition. *Naval Research Logistics*, 55, 643–653.
- Seiford, L. M., & Zhu, J. (1999). Profitability and marketability of the top 55 US commercial banks. *Management Science*, 45(9), 1270–1288.
- Tone, K., & Tsutsui, M. (2009). Network DEA: a slacks-based measure approach. *European Journal of Operational Research*, 197, 243–252.

Combination versus decomposition in network data envelopment analysis

Shahram Enayati Takleh*

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,
Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Hossein Azizi

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,
Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Shahruz Fathi Ajirlu

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Abstract

The fundamental approaches to two-stage network data envelopment analysis are the multiplicative and the additive efficiency decomposition approaches. Both they assume a series relationship between the two stages but they differ in the definition of the overall system efficiency as well as in the way they conceptualize the decomposition of the overall efficiency to the efficiencies of the individual stages. In this paper, we first show that the efficiency estimates obtained by the additive decomposition method are biased, by unduly favouring one stage against the other, while those obtained by the multiplicative method are not unique.

Keywords: Data envelopment analysis (DEA), Two-stage process, Network DEA, Decomposition, Composition, Efficient frontier.

* Corresponding Author