دو رویکرد جدید برای سنجش وزن نظرات فازی در تحلیل تصمیم گروهی

رسول جاهد

گروه ریاضی، واحد گرمی، دانشگاه آزاد اسلامی، گرمی، ایران

چکیده

تجمیع نظرات فازی جزء مهمی از تحلیل تصمیم گروهی با اطلاعات فازی است. این مقاله دو رویکرد را برای سنجش وزن‌های مرتبط با نظرات فازی پیشنهاد می‌کند. این رویکردها به ترتیب عبارت‌اند از: مینیمم‌سازی مجموع مربع فاصله از هر نظر فازی وزن داده شده تا نظر دیگر، که به آن روش کمترین مربع فاصله می‌گویند؛ و مینیمم‌سازی مجموع مربع تفاضل بین هر دو نظر فازی وزن داده شده، که به آن روش کمترین مربع‌های مبتنی بر غیرفازی‌سازی می‌گویند. این دو رویکرد در این مقاله توضیح داده شده و یک مثال برای آنها ارائه می‌شود، تا سادگی و اثربخشی آنها در تجمیع نظرات فازی معلوم شود.

واژگان کلیدی: نظر فازی؛ تجمیع نظرات فازی؛ تحلیل تصمیم گروهی فازی؛ غیرفازی‌سازی.

۱- مقدمه

در تحلیل تصمیم گروهی فازی، غالباً لازم می‌شود که نظرات فازی منفرد تجمیع شود و به عنوان مبنای تصمیم گروهی، اجماع گروهی به دست آید. برای به دست آوردن اجماع گروهی از نظرات منفرد فازی، رویکردهای مختلفی در مقالات ارائه شده است. Bardossy و همکاران [۱] پنج تکنیک ترکیبی را برای تجمیع نظرات فازی منفرد تعریف کردند و خواص آنها را مورد مطالعه قرار دادند. روش‌های ترکیبی که آنها پیشنهاد کردند، شامل وزن‌دهی قطعی، وزن‌دهی فازی، بسط فازی مینیمم، بسط فازی محدب، و بسط خطی مختلط هستند. Hsu و Chen [۱۱] یک روش تجمیع تشابه (SAM) را برای تجمیع نظرات فازی منفرد ارائه کردند، که به طور ذهنی به وسیله‌ی افراد خبره برآورد شده و با اعداد فازی ذوزنقه‌ای (TFN) مثبت نمایش داده می‌شوند. روش آنها ابتدا میزان توافق بین هر دو نظر فازی را با استفاده از یک تابع شباهت دو به دو تعیین می‌کند. برای هر نظر فازی، درجه‌ی توافق با نظرات دیگر متوسط‌گیری می‌شود. سپس، درجه‌های متوسط توافق نرمال‌سازی شده و به طور خطی با وزن‌های اهمیت متناظر افراد خبره ترکیب می‌شوند تا وزن‌های مرکب نهایی برای تجمیع نظرات فازی منفرد به دست آید. وقتی که نظرات فازی با هم تداخل ندارند، SAM قابل استفاده نیست. Ölçer و Odabaşı [۱۹] نیز روش مشابهی را پیشنهاد کردند. Moon و Kang [۱۸] روشی را برای تعیین مقدار انتگرال کل یک عدد فازی مثلثی پیشنهاد کردند. سپس مقادیر انتگرال کل نرمال‌سازی می‌شوند، تا تبدیل به وزن‌های نظرات فازی شوند. Kumar و Karmakar [۱۴] یک روش تجمیع را بر اساس اهمیت نسبی افراد خبره و فاصله‌ی اطمینان اعداد فازی ذوزنقه‌ای ارائه کردند. در روش آنها، اعداد فازی ذوزنقه‌ای ابتدا با استفاده از *α-cut* (برش α) تبدیل به بازه می‌شوند، و این بازه‌ها بعداً وزن داده شده و به یک بازه‌ی کلی افزوده می‌شوند، و نهایتاً این بازه‌ی کلی مجدداً به یک عدد فازی ذوزنقه‌ای تجمیعی، تبدیل می‌شود. اخیراً، Lee [۱۵] یک رویکرد اجماع بهینه را برای تجمیع نظرات فازی منفرد ارائه کرد که مجموع تفاوت‌های وزن داده شده بین اجماع تجمیعی و نظرات منفرد را مینیمم‌سازی می‌کند.

رویکرد Lee در مقایسه با برخی از روش‌های فوق‌الذکر مزایایی در بر دارد. این رویکرد حتی در مواردی که نظرات فازی منفصل هستند، معتبر است. به علاوه، این روش وزن‌ها را با یک مدل بهینه‌سازی تعیین می‌کند، و لذا از نظر معیار مدل بهینه است. با این حال، رویکرد Lee غیرخطی و از نظر محاسباتی پیچیده است، و لذا کاربرد آن در تحلیل تصمیم گروهی فازی در زندگی واقعی عملی نیست. هدف از این مقاله، ارائه‌ی دو رویکرد برای غلبه بر معایب روش Lee است. رویکرد اول که در اینجا ارائه خواهد شد، مجموع مربع فاصله از هر نظر فازی وزن داده شده تا نظر دیگر را مینیمم‌سازی می‌کند و به آن *روش کمترین مربع فاصله* (LSDM) می‌گویند. رویکرد دوم مجموع مربع تفاضل بین هر دو نظر فازی وزن داده شده را مینیمم‌سازی می‌کند و به آن *روش کمترین مربع‌های مبتنی بر غیرفازی‌سازی* (DLSM) می‌گویند.

آنچه این دو رویکرد جدید را از روش‌های قبلی متمایز می‌کند، سادگی آنها است، که ناشی از عبارت‌های شکل بسته‌ی آنها است، که بر خلاف بسیاری از روش‌های فعلی، نیازی به انجام روال‌های تکراری وقت‌گیر ندارد. به علاوه، این رویکردها دارای خواص زیر هستند، که آنها را از نظر کاربردپذیری در محدوده‌ی وسیعی از مسایل تجمیع در موقعیت‌های تصمیم‌گیری گروهی فازی جذاب‌تر می‌کند: از آنها می‌توان برای تجمیع اعداد بازه‌ای، اعداد فازی مثلثی، اعداد فازی ذوزنقه‌ای، و حتی ترکیبات آنها، صرف نظر از اینکه همپوشانی داشته باشند یا نه، استفاده کرد؛ وزن‌ها و نظر فازی تجمیعی با یک روش بهینه‌سازی به دست می‌آیند؛ و از آنها می‌توان نه فقط برای تجمیع نظرات فازی منفرد، که حتی برای تجمیع روابط ترجیح فازی منفرد و ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دو استفاده کرد.

ما این مقاله را به صورت زیر سازماندهی کرده‌ایم. در قسمت ۲، به اختصار روش Lee را به اختصار بررسی می‌کنیم و رویکردهای جدید خود را برای سنجش وزن نظرات فازی ارائه می‌کنیم. توصیف نظری رویکردهای جدید نیز در این قسمت ارائه می‌شود. در قسمت ۳، یک مثال عددی را ارائه می‌کنیم که کاربردهای رویکردهای پیشنهادی را در تحلیل تصمیم گروهی فازی نشان می‌دهند، و شواهد اثربخشی و سادگی آنها را ارائه می‌دهند. قسمت ۴ نتیجه‌گیری مقاله را بیان می‌کند.

۲- رویکردهای بهینه‌سازی برای سنجش وزن نظرات فازی

یک موقعیت تصمیم‌گیری گروهی را در نظر بگیرید که در آن اعضای گروه نظرات فازی خود را به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای یا مثلثی بیان می‌کنند: $\tilde{R}_i=(r_{i1},\ldots,r_{im})$ ($i=1,\ldots,n$) که n تعداد افراد گروه است، و برای اعداد فازی مثلثی داریم $m=3$ و برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای داریم $m=4$. فرض کنید $\tilde{R}=(r_1,\ldots,r_m)=F(\tilde{R}_1,\ldots,\tilde{R}_n)$ تجمیع n نظر فازی باشد. در حالت کلی، عملگرها و قواعد تجمیع متعددی وجود دارند که می‌توان از آنها برای تجمیع نظرات فازی استفاده کرد. برخی از آنها خطی و برخی دیگر غیرخطی‌اند. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند برای بحث بیشتر درباره‌ی این عملگرها و قواعد به [۹، ۱۰، ۱۲، ۱۷، ۲۰–۲۵، ۲۷] مراجعه کند. در این مقاله برای تجمیع نظرات فازی اعضای گروه از یک روال تجمیع خطی شایع استفاده خواهیم کرد. بر اساس قاعده‌ی تجمیع جمیع، داریم:

$$\tilde{R}=\sum_{i=1}^{n}w_i\tilde{R}_i=\left(\sum_{i=1}^{n}w_ir_{i1},\ldots,\sum_{i=1}^{n}w_ir_{im}\right) \quad (۱)$$

که در اینجا w_i وزن نسبی نظر فازی i-اُم ($i=1,\ldots,n$) است. این وزن‌ها در شرط نرمال‌سازی زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=1 \quad (۲)$$

که می‌توان آن را به شکل برداری به این صورت بیان کرد:

$$e^TW=1 \quad (۳)$$

که در اینجا $W=(w_1,\ldots,w_n)^T$ یک بردار وزن است، و اندیس بالای ^{T} نشان دهنده‌ی ترانهاده است، و داریم $e^T=(1,\ldots,1)$. مسئله‌ی تجمیع n نظر فازی اساساً معادل مسئله‌ی تعیین بردار وزن W است. به منظور تعیین وزن‌ها، Lee [۱۵] مدل بهینه‌سازی زیر را ایجاد کرد:

$$\text{Min } Z_{m_0,c}(\tilde{W},\tilde{R})=\sum_{i=1}^{n}(\tilde{w}_i)^{m_0}\left(c-S_2(\tilde{R}_i,\tilde{R})\right) \quad (۴)$$

به شرط

$$\tilde{W}\in M=\left\{\tilde{W}\,|\,W=(\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_n),\tilde{w}_i\geq 0,\sum_{i=1}^{n}\tilde{w}_i=1\right\} \quad (۵)$$

که در اینجا $m_0>1$ یک عدد صحیح است، $c>1$ یک ثابت است، و $S_2(\tilde{R}_i,\tilde{R})$ یک معیار شباهت بین $\tilde{R}_i$ و $\tilde{R}$ است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_2(\tilde{R}_i,\tilde{R})=1-\frac{1}{4u^2}\left(d_2(\tilde{R}_i,\tilde{R})\right)^2=1-\frac{\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_k)^2}{4(\max(U)-\min(U))^2} \quad (۶)$$

عبارت $\left(c-S_2(\tilde{R}_i,\tilde{R})\right)$ تفاوت بین $\tilde{R}_i$ و $\tilde{R}$ را نشان می‌دهد، در حالی که $d_2(\tilde{R}_i,\tilde{R})$ فاصله‌ی اقلیدسی بین آنها است. U جهان گفتمان است. جواب بهینه‌ی مدل ارائه شده در معادله‌های (۴) و (۵) را می‌توان با حل معادلات غیرخطی زیر از طریق تکرار به دست آورد:

$$\tilde{R}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{w}_i)^{m_0}}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{w}_i)^{m_0}\tilde{R}_i \quad (۷)$$

$$\tilde{w}_i=\frac{[1/(c-S_2(\tilde{R}_i,\tilde{R}))]^{1/(m_0-1)}}{\sum_{j=1}^{n}[1/(c-S_2(\tilde{R}_j,\tilde{R}))]^{1/(m_0-1)}}\quad i=1,\ldots,n \quad (۸)$$

فرض کنید $\tilde{w}_i^*$ ($i=1,\ldots,n$) جواب (۷) و (۸) باشد. آنگاه وزن‌های بهینه‌ی $W^*=(w_1^*,\ldots,w_n^*)^T$ را می‌توان از طریق رابطه‌ی زیر تولید کرد:

$$\tilde{w}_i^* = \frac{(\tilde{w}_i)^{m_0}}{\sum_{j=1}^{n}(\tilde{w}_j^*)^{m_0}} \quad i=1,\dots,n \tag{۹}$$

به نظر ما، روش Lee کمی پیچیده است. علاوه بر دشواری محاسبه‌ی آن، این شرط نیز در آن وجود دارد که پارامترهای m_0 و c را باید با دقت انتخاب کرد، چرا که مقدار آنها بر نتایج نهایی تأثیر می‌گذارد. می‌توان با سنجیدن وزن‌ها با یک رویکرد تحلیلی بر این موانع غلبه کرد، تا بتوان نظرات فازی را به سهولت تجمیع کرد. در زیر، دو روش تحلیلی را برای این کار ارائه می‌دهیم.

بحث را با تعریف فاصله‌ی وزنی بین دو عدد فازی آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱: فرض کنید $\tilde{R}_i=(r_{i1},\dots,r_{im})$ و $\tilde{R}_j=(r_{j1},\dots,r_{jm})$ دو عدد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای باشند، با $m=3$ برای اعداد فازی مثلثی و $m=4$ برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای، و w_i و w_j وزن‌های نسبی آنها باشند. فاصله‌ی اقلیدسی وزنی بین $\tilde{R}_i$ و $\tilde{R}_j$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{ij} = f(w_i\tilde{R}_i, w_j\tilde{R}_j) = \sqrt{(w_i r_{ik} - w_j r_{jk})^2} \tag{۱۰}$$

غالباً نظرات فازی $\tilde{R}_1,\dots,\tilde{R}_n$ پراکنش گسترده‌ای دارند. به منظور نیل به ماکزیموم توافق، نظرات فازی وزن داده شده‌ی $w_1\tilde{R}_1,\dots,w_n\tilde{R}_n$ باید به سوی یکدیگر حرکت کنند. این، اصلی است که نظر فازی جمعی بر مبنای آن تولید می‌شود. در صورتی که نظرات فازی وزن داده شده دقیقاً یکسان باشند، آنگاه نظر فازی تجمیعی نیز باید همان باشد. مطابق این فرضیات، مدل بهینه‌سازی زیر را می‌سازیم که مجموع مربع فاصله‌ی بین همه‌ی زوج‌های نظرات فازی وزن داده شده را مینیمم‌سازی می‌کند:

$$\text{Min } J = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(w_i r_{ik} - w_j r_{jk})^2\right] \tag{۱۱}$$

به شرط

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{۱۲}$$

$$w_i \geq 0 \quad i=1,\dots,n \tag{۱۳}$$

ما به روشی که بر پایه‌ی این مدل بنا شده است، روش کمترین مربع فاصله، LSDM، می‌گوییم، که برای آن قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه‌ی ۱: فرض کنید $W^*=(w_1^*,\dots,w_m^*)^T$ جواب بهینه‌ی (۱۱)–(۱۳) باشد. آنگاه داریم:

$$W^* = \frac{G^{-1}e}{e^T G^{-1} e} \geq 0 \tag{۱۴}$$

که در اینجا $e=(1,\dots,1)$ ترانهاده‌ی e^T است، و G^{-1} معکوس G است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G=(g_{ij})_{n\times n} = \begin{bmatrix} (n-1)\sum_{k=1}^{m} r_{1k}^2 & -\sum_{k=1}^{m} r_{1k}r_{2k} & \cdots & -\sum_{k=1}^{m} r_{1k}r_{nk} \\ -\sum_{k=1}^{m} r_{2k}r_{1k} & (n-1)\sum_{k=1}^{m} r_{2k}^2 & \cdots & -\sum_{k=1}^{m} r_{2k}r_{nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sum_{k=1}^{m} r_{nk}r_{1k} & -\sum_{k=1}^{m} r_{nk}r_{2k} & \cdots & (n-1)\sum_{k=1}^{m} r_{nk}^2 \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

که داریم:

$$g_{ij} = \begin{cases} (n-1)\sum_{k=1}^{m} r_{ik}^2 & i = j = 1,\ldots,n \\ -\sum_{k=1}^{m} r_{ik} r_{jk} & i,j = 1,\ldots,n;\ j \neq i \end{cases} \qquad (۱۶)$$

برهان: رک. به [۲۸].

گرچه LSDM در معادله‌ی (۱۴) یک فرمول شکل بسته برای برآورد وزن‌ها ارائه می‌دهد، ولی به علت لزوم حل یک ماتریس وارون، نمی‌توان آن را روش بسیار آسانی به حساب آورد.

اکنون مفهوم غیرفازی‌سازی نظرات فازی را ارائه می‌کنیم، که به یک روش ساده‌تر منتهی می‌شود. برای یک عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{R}_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4})$، مقدار غیرفازی آن z_i را می‌توان بنا به [۶–۸، ۱۶] به صورت زیر تعیین کرد:

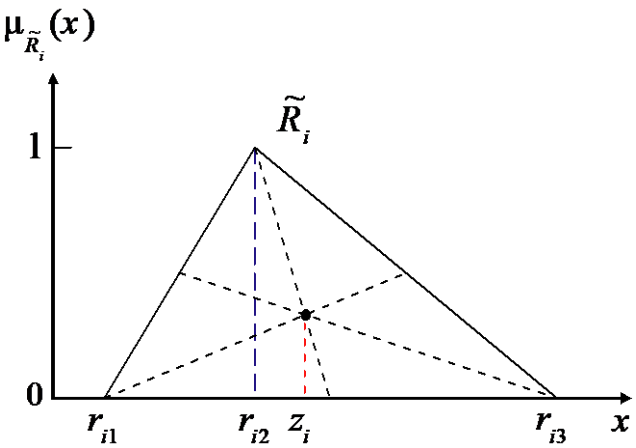
$$\frac{1}{2}(r_{i2} - r_{i1}) + (z_i - r_{i2}) = \frac{1}{2}(r_{i4} - r_{i3}) + (r_{i3} - z_i) \qquad (۱۷)$$

پس از ساده کردن این معادله داریم:

$$z_i = \frac{1}{4}(r_{i1} + r_{i2} + r_{i3} + r_{i4}) \qquad (۱۸)$$

معذالک، معادله‌ی (۱۸) فقط برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای مناسب است، و نمی‌توان آن را برای تعیین مقدار غیرفازی یک عدد فازی مثلثی مورد استفاده قرار داد. مقدار غیرفازی یک عدد فازی مثلثی $\tilde{R}_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3})$ را می‌توان بر اساس مرکز هندسی آن [۴، ۲۶]، شکل ۱، تعیین کرد، که عبارت است از

$$z_i = \frac{\int_{r_{i1}}^{r_{i3}} x\mu_{\tilde{R}_i}(x)dx}{\int_{r_{i1}}^{r_{i3}} \mu_{\tilde{R}_i}(x)dx} = \frac{\int_{r_{i1}}^{r_{i2}} \left(x \cdot \frac{x - r_{i1}}{r_{i2} - r_{i1}}\right)dx + \int_{r_{i2}}^{r_{i3}} \left(x \cdot \frac{r_{i3} - x}{r_{i3} - r_{i2}}\right)dx}{\int_{r_{i1}}^{r_{i2}} \left(\frac{x - r_{i1}}{r_{i2} - r_{i1}}\right)dx + \int_{r_{i2}}^{r_{i3}} \left(\frac{r_{i3} - x}{r_{i3} - r_{i2}}\right)dx} = \frac{1}{3}(r_{i1} + r_{i2} + r_{i3}) \qquad (۱۹)$$



شکل ۱: غیرفازی‌سازی عدد فازی مثلثی.

معادله‌های (۱۸) و (۱۹) به صورت تعریف زیر با هم ترکیب می‌شوند:

تعریف ۲: فرض کنید $\tilde{R}_i = (r_{i1}, \ldots, r_{im})$ یک عدد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای باشد. مقدار غیرفازی شده‌ی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_i = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} r_{ik} \qquad (۲۰)$$

که در اینجا $m = 3$ برای اعداد فازی مثلثی و $m = 4$ برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای است.

بنا به تعریف ۲، مقدار غیرفازی شده‌ی یک عدد فازی وزن داده شده‌ی $w_i\tilde{R}_i$ را می‌توان به این صورت تعیین کرد:

$$z_i = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} w_i r_{ik} = w_i\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} r_{ik}\right) = w_i z_i \qquad (۲۱)$$

مقدار غیرفازی شده‌ی اعداد فازی وزن داده شده باید حتی‌الامکان به یکدیگر نزدیک باشد، که این مبنای مدل بهینه‌سازی زیر است:

$$\text{Min } J = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}(w_i z_i - w_j z_j)^2 \qquad (۲۲)$$

به شرط

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad (۲۳)$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,n \qquad (۲۴)$$

که مجموع مربع‌های تفاضل بین هر دو عدد فازی وزن داده شده را مینیمم‌سازی می‌کند. ما به روشی که از معادله‌های (۲۲)–(۲۴) برای تعیین وزن‌ها استفاده می‌کند، روش کمترین مربع‌های مبتنی بر غیرفازی‌سازی، یا DLSM، می‌گوییم.

برای راحتی، مدل فوق را به شکل ماتریسی به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{Min } J = W^T B W \qquad (۲۵)$$

به شرط

$$e^T W = 1 \qquad (۲۶)$$

$$W \geq 0 \qquad (۲۷)$$

که در اینجا داریم:

$$B = (b_{ij})_{n\times n} = \begin{bmatrix} (n-1)z_1^2 & -z_1 z_2 & \cdots & -z_1 z_n \\ -z_2 z_1 & (n-1)z_2^2 & \cdots & -z_2 z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z_n z_1 & -z_n z_2 & \cdots & (n-1)z_n^2 \end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

و

$$b_{ij} = \begin{cases} (n-1)z_i^2 & i = j = 1,\ldots,n \\ -z_i z_j & i, j = 1,\ldots,n; j \neq i \end{cases} \qquad (۲۹)$$

شروط بهینگی مدل بهینه‌سازی ارائه شده در معادله‌های (۲۵)–(۲۷) به دست آمده از روش مضربی لاگرانژ به صورت زیر داده می‌شود:

$$BW - \lambda e = 0 \qquad (۳۰)$$

$$e^T W = 1 \qquad (۳۱)$$

خصلت‌های زیر محاسبه‌ی وزن‌ها را تسهیل می‌کنند:

لم ۱: فرض کنید B ماتریس تعیین شده توسط معادله‌ی (۲۸) باشد. آنگاه B یک ماتریس منفرد است.

برهان: رک. به [۲۸].

لم ۲: فرض کنید λ^* جواب معادله‌ی (۳۰) باشد. آنگاه $\lambda^* \equiv 0$.

برهان: رک. به [۲۸].

لم ۳: فرض کنید $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی باشد که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\bar{B} = (\bar{b}_{ij})_{n\times n} = \begin{bmatrix} (n-1)z_1 & -z_2 & \cdots & -z_n \\ -z_1 & (n-1)z_2 & \cdots & -z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z_1 & -z_2 & \cdots & (n-1)z_n \end{bmatrix} \quad (۳۲)$$

آنگاه $\bar{B}W^* = 0$، که در اینجا W^* جواب معادله‌های (۳۰) و (۳۱) است.

برهان: رک. به [۲۸].

قضیه‌ی ۲: فرض کنید W^* جواب معادله‌های $\bar{B}W^* = 0$ و $e^T W = 1$ باشد. آنگاه داریم:

$$w_i^* = \frac{1/z_i}{\sum_{k=1}^{n} 1/z_k} \quad i = 1,\ldots,n \quad (۳۳)$$

برهان: رک. به [۲۸].

قضیه‌ی ۲ محاسبه‌ی وزن‌های نسبی نظرات فازی را تسهیل می‌کند، که این به نوبه‌ی خود، کار تجمیع نظرات فازی را راحت می‌کند.

لازم است که خاطرنشان کنیم که وزن‌های تعیین شده توسط معادله‌های (۱۴) و (۳۳) منعکس کننده‌ی اهمیت نسبی اختصاص داده شده به افراد خبره برای نظرات فازی آنها نیست. اگر بخواهیم اهمیت نسبی نظر هر فرد خبره را در فرآیند تجمیع در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان از ترکیب محدب زیر برای تعیین وزن‌های مرکب نهایی استفاده کرد:

$$w_i^* = \alpha w_{i1}^* + (1-\alpha) w_{i2} \quad i = 1,\ldots,n \quad (۳۴)$$

که در اینجا w_{i1}^* وزن عینی تعیین شده توسط (۱۴) یا (۳۳)، w_{i2} وزن اهمیت نسبی نظر خبره‌ی i-اُم، و $0 \le \alpha \le 1$ یک پارامتر است. در یک انتها، برای $\alpha = 0$، فرآیند تجمیع فقط شامل توزیع اهمیت نسبی نظرات افراد خبره است. در انتهای دیگر، برای $\alpha = 1$، فرآیند تجمیع فقط شامل وزن‌های عینی تعیین شده توسط مدل بهینه‌سازی است.

۳- یک مثال عددی

در این قسمت برای مشخص کردن نحوه‌ی استفاده از رویکردهای پیشنهادی LSDM و DLSM، یک مثال عددی ارائه می‌کنیم.

مثال ۱: یک مسئله‌ی تحلیل تصمیم گروهی را که به وسیله‌ی Lee [۱۵] و Hsu و Chen [۱۱] بررسی شده است، در نظر بگیرید، که در آن سه فرد خبره نظرات خود را به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای زیر بیان می‌کنند:

$$\tilde{R}_1 = (1,2,3,4) \quad \tilde{R}_2 = (1.5,2.5,3.5,5) \quad \tilde{R}_2 = (2,2.5,4,4)$$

برای کاربرد LSDM، ابتدا ماتریس M زیر را می‌سازیم:

$$G = \begin{bmatrix} 60 & -37 & -43 \\ -37 & 91.5 & -53.25 \\ -43 & -53.25 & 124.5 \end{bmatrix}$$

که معکوس آن عبارت است از

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1.9872 & 1.6016 & 1.3714 \\ 1.6016 & 1.3055 & 1.1115 \\ 1.3714 & 1.1115 & 0.9571 \end{bmatrix}$$

آنگاه، بنا به معادله‌های (۱۴) و (۱)، وزن‌های بهینه و تجمیع بهینه را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$W^{*T} = (0.3994, 0.3236, 0.2770)$$

$$\tilde{R}^* = \sum_{i=1}^{3} w_i^* \tilde{R}_i = (1.4388, 2.3003, 3.4388, 4.8776)$$

برای کاربرد DLSM، مقادیر غیرفازی شده‌ی سه عدد فازی ذوزنقه‌ای فوق را به شرح زیر حساب می‌کنیم:

$$z_1 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{4} r_{1k} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$$

$$z_2 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{4} r_{2k} = \frac{1.5+2.5+3.5+5}{4} = 3.125$$

$$z_3 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{4} r_{3k} = \frac{2+2.5+4+6}{4} = 3.625$$

معادله‌های (۳۳) و (۱) وزن‌های بهینه و تجمیع بهینه را به صورت زیر به دست می‌دهند:

$$w_1^* = \frac{1/z_1}{\sum_{k=1}^{3} 1/z_k} = \frac{\frac{1}{2.5}}{\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.125}+\frac{1}{3.625}} = 0.4017$$

$$w_2^* = \frac{1/z_2}{\sum_{k=1}^{3} 1/z_k} = \frac{\frac{1}{3.125}}{\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.125}+\frac{1}{3.625}} = 0.3213$$

$$w_3^* = \frac{1/z_3}{\sum_{k=1}^{3} 1/z_k} = \frac{\frac{1}{3.625}}{\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.125}+\frac{1}{3.625}} = 0.2770$$

$$\tilde{R}^* = \sum_{i=1}^{3} w_i^* \tilde{R}_i = (1.4377, 2.2992, 3.4377, 4.8753)$$

از هر دو روش، مقادیر تجمیع بسیار مشابه نتایج به دست آمده توسط روش بهینه‌سازی Lee [۱۵]، $\tilde{R}^* = (1.5006, 2.3370, 3.5006, 5.0012)$ و روش SAM مربوط به Hsu و Chen [۱۱] $\tilde{R}^* = (1.519, 2.356, 3.519, 5.038)$، حاصل می‌شود. رویکردهای ما بسیار ساده‌تر از روال Lee هستند.

فرض کنید می‌خواهیم اهمیت نسبی نظر هر یک از این سه فرد خبره را در فرآیند تجمیع در نظر بگیریم. فرض کنید وزن‌های اهمیت نسبی آنها $w_{12} = 0.4$، $w_{22} = 0.3$، و $w_{32} = 0.3$ باشند. همچنین، فرض می‌کنیم که پارامتر $\alpha = 0.4$ برای محاسبه‌ی وزن‌های مرکب مناسب است. با استفاده از LSDM و معادله‌ی (۳۴)، داریم:

$$W^{*T} = 0.4 \times (0.3994, 0.3236, 0.2770) + 0.6 \times (0.4, 0.3, 0.3)$$
$$= (0.3998, 0.3094, 0.2908)$$

$$\tilde{R}^* = \sum_{i=1}^{3} w_i^* \tilde{R}_i = (1.4455, 2.3001, 3.4455, 4.8910)$$

از سوی دیگر، با DLSM داریم:

$$W^{*T} = 0.4 \times (0.4017, 0.3213, 0.2770) + 0.6 \times (0.4, 0.3, 0.3)$$
$$= (0.4007, 0.3085, 0.2908)$$

$$\tilde{R}^* = \sum_{i=1}^{3} w_i^* \tilde{R}_i = (1.4451, 2.2997, 3.4451, 4.8901)$$

هر دوی این نتایج بسیار شبیه نتیجه‌ی $\tilde{R}^* = (1.4701, 2.3141, 3.4701, 4.9402)$ با روش Lee و نتیجه‌ی $\tilde{R}^* = (1.4776, 2.3224, 3.4776, 4.9552)$ با روش Hsu و Chen هستند.

۴- نتیجه‌گیری

ما در این مقاله دو رویکرد، به نام LSDM و DLSM برای سنجش وزن نظرات فازی منفرد در یک تصمیم‌گیری گروهی ارائه کردیم، تا بر این اساس، بتوان نظرات فازی را به صورتی ساده و مؤثر تجمیع کرد، تا یک اجماع گروهی به دست آید. در این مقاله مبانی نظری این رویکردها را ارائه کردیم و مثال‌هایی را نیز برای توضیح کاربرد آنها ذکر کردیم. LSDM و DLSM به خاطر خواص زیر برای کسانی که می‌خواهند نقش میانجی را در یک موقعیت تصمیم‌گیری گروهی ایفا کنند، مناسب هستند:

- سهولت محاسباتی: عبارت‌های شکل بسته‌ی LSDM و DLSM، بر خلاف بسیاری از روش‌های فعلی، نیازی به انجام روال‌های تکراری وقت‌گیر را از میان بر می‌دارد. محاسبات DLSM را حتی با یک ماشین‌حساب دستی هم می‌توان انجام داد.
- انعطاف‌پذیری کاربردی: این روش‌ها را می‌توان برای تجمیع اعداد بازه‌ای، اعداد فازی مثلثی، اعداد فازی ذوزنقه‌ای، و حتی ترکیب‌های آنها، صرف نظر از اینکه با هم تداخل داشته باشند یا خیر، مورد استفاده قرار داد. این خصلت محدوده‌ی مسایل تجمیعی را در جاهایی که قابل کاربرد هستند، به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد. علاوه بر کاربرد آنها برای تجمیع نظرات فازی منفرد، از LSDM و DLSM می‌توان حتی برای تجمیع روابط ترجیح فازی منفرد و ماتریس‌های مقایسه‌ی دو به دو نیز استفاده کرد.
- بهینگی: وزن‌های اهمیت نسبی و نظر فازی تجمیعی هر دو با روش بهینه‌سازی به دست می‌آیند.

منابع

Bardossy, A., Duckstein, L., & Bogardi, I. (1993). Combination of fuzzy numbers representing expert opinions. Fuzzy Sets and Systems, 57, 173–181.
Berman, A., & Plemmons, R. J. (1979). Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Academic, New York.
Bonder, C. G. E., de Graan, J. G., & Lootsma, F. A. (1989). Multicriteria decision analysis with fuzzy pairwise comparisons. Fuzzy Sets and Systems, 29, 133–143.
Bortolan, G., & Degani, R. (1985). A review of some methods for ranking fuzzy subsets. Fuzzy Sets and Systems, 15, 1–19.
Buckley, J. J. (1985). Fuzzy hierarchical analysis. Fuzzy Sets and Systems, 17, 233–247.
Chen, S. M. (1996). Evaluating weapon systems using fuzzy arithmetic operations. Fuzzy Sets and Systems, 77, 265–276.
Chen, S. M. (1997). A new method for tool steel materials selection under a fuzzy environment. Fuzzy Sets and Systems, 92, 265–274.
Chen, S. M. (2001). Fuzzy group decision-making for evaluating the rate of aggregative risk in software development. Fuzzy Sets and Systems, 118, 75–88.
Cholewa, W. (1985). Aggregation of fuzzy opinions—an axiomatic approach. Fuzzy Sets and Systems, 17, 249–258.
Delgado, M., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., & Martínez, L. (1998). Combining numerical and linguistic information in group decision making. Information Sciences, 107, 177–194.
Hsu, H. M., & Chen, C. T. (1996). Aggregation of fuzzy opinions under group decision-making. Fuzzy Sets and Systems, 79, 279–285.
Irion, A. (1998). Fuzzy rules and fuzzy functions: a combination of logic and arithmetic operations for fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 99, 49–56.
Kahraman, C., Ruan, D., & Doğan, I. (2003). Fuzzy group decision-making for facility location selection. Information Sciences, 157, 135–153.
Kumar, A., & Karmakar, G. (2001). Aggregation of opinions using fuzzy numbers. International Journal of Systems Science, 32, 1399–1411.
Lee, H. S. (2002). Optimal consensus of fuzzy opinions under a group decision-making environment. Fuzzy Sets and Systems, 132, 303–315.
Lee, H. M., Lee, S. Y., Lee, T. Y., & Chen, J. J. (2003). A new algorithm for applying fuzzy set theory to evaluate the rate of aggregative risk in software development. Information Sciences, 165, 177–197.
Montero de Juan, F. J. (1988). Aggregation of fuzzy opinions in a non-homogeneous group. Fuzzy Sets and Systems, 25, 15–20.
Moon, J. H., & Kang, C. S. (1999). Use of fuzzy set theory in the aggregation of expert judgments. Annals of Nuclear Energy, 26, 461–469.
Ölçer, A. Y., & Odabaşı, A. Y. (2005). A new fuzzy multiple attributive group decision-making methodology and its application to propulsion/maneuvering system selection problem. European Journal of Operational Research, 166, 93–114.
Park, K. S., & Kim, S. H. (1996). A note on the fuzzy weighted additive rule. Fuzzy Sets and Systems, 77, 315–320.
Ramakrishnan, R., & Rao, C. J. M. (1992). The fuzzy weighted additive rule. Fuzzy Sets and Systems, 46, 177–187.
Xu, Z. S. (2005). Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision-making under an uncertain linguistic environment. Information Sciences, 169, 171–184.
Xu, Z. S. (2004). A method based on linguistic aggregation operators for group decision-making with linguistic preference

relations. Information Sciences, 166, 19–30.
Yager, R. R. (1994). Aggregation operators and fuzzy systems modeling. Fuzzy Sets and Systems, 67, 129–145.
Yager, R. R. (1993). A general approach to criteria aggregation using fuzzy measures. International Journal of Man–Machine Studies, 39, 187–213.
Yager, R. R. (1981). A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. Information Sciences, 24, 143–161.
Zhang, G., & Lu, J. (2003). An integrated group decision-making method dealing with fuzzy preferences for alternatives and individual judgments for selection criteria. Group Decision and Negotiation, 12, 501–515.
Wang, Y. M., & Parkan, C. (2006). Two new approaches for assessing the weights of fuzzy opinions in group decision analysis. Information Sciences, 176, 3538–3555.

Two new approaches for assessing the weights of fuzzy opinions in group decision analysis

Rasul Jahed
Department of Applied Mathematics, Germi Branch, Islamic Azad University, Germi, Iran.

Abstract

Aggregating fuzzy opinions is an important part of group decision analysis with fuzzy information. This article proposes two approaches for assessing the weights associated with fuzzy opinions. These approaches are: minimizing the sum of squared distances from each given fuzzy opinion to another, referred to as the Least Squares Distance method; and minimizing the sum of squared differences between each pair of given fuzzy opinions, known as the defuzzification-based Least Squares method. These two approaches are explained in the article, and an example is provided to demonstrate their simplicity and effectiveness in aggregating fuzzy opinions.

Keywords: Fuzzy opinion; Aggregation of fuzzy opinions; Fuzzy group decision analysis; Defuzzification.