

به دست آوردن مرز تحلیل پوششی داده‌ها برای ساختار دومرحله‌ای

سمیه رشید

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

حسین عزیزی

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

شهر روز فتحی اجیرلو

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) رویکردی برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیری (DMUهای) هم‌تا است. DEA بسط داده شده است تا کارایی فرآیندهای دومرحله‌ای را که در آن خروجی‌های مرحله‌ی اول محصولات بینابینی هستند که ورودی‌های مرحله‌ی دوم را تشکیل می‌دهند، ارزیابی کند. مدل DEAی دومرحله‌ای به دست آمده نه فقط یک نمره‌ی کارایی کلی برای کل فرآیند ارائه می‌کند، بلکه یک نمره‌ی کارایی نیز برای هر مرحله به دست می‌دهد. به علت وجود محصولات بینابینی، روال معمول تعدیل ورودی‌ها و خروجی‌ها، مطابق روش استاندارد DEA، لزوماً یک تصویر مرز ارائه نمی‌کند. مقاله‌ی حاضر رویکردی را برای تعیین نقاط مرز برای DMUهای ناکارا در چارچوب DEAی دومرحله‌ای ارائه می‌کند.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها؛ کارایی؛ فرآیند دومرحله‌ای؛ محصولات بینابینی؛ مرز.

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) رویکردی برای شناسایی بهترین عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری (DMUهای) هم‌تا در حضور ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد است (Charnes و همکاران، ۱۹۷۸). DEA نه فقط نمرات کارایی را برای DMUهای ناکارا ارائه می‌کند، بلکه تصاویرهای کارا را نیز برای واحدهایی که روی مرز کارا هستند، ارائه می‌کند. در سال‌های اخیر، برخی از مطالعات DEA روی فرآیندهای دومرحله‌ای تمرکز کرده‌اند. به عنوان مثال، Seiford و Zhu (۱۹۹۹) یک رویکرد DEA را برای ارزیابی بانک‌های تجاری آمریکا در یک فرآیند دومرحله‌ای متشکل از سودآوری و بازارپذیری ارائه کردند. در مطالعه‌ی آنها، سودآوری با در نظر گرفتن نیروی کار و دارایی‌های به صورت ورودی و سود و درآمد به عنوان خروجی اندازه‌گیری می‌شود. در مرحله‌ی دوم برای بازارپذیری، سود و درآمد به عنوان ورودی استفاده می‌شوند، در حالی که ارزش بازار، بازگشت و عایدی به ازای سهم به عنوان خروجی محسوب می‌شوند. Zhu (۲۰۰۰) همین فرآیند دومرحله‌ای را برای ۵۰۰ شرکت برتر جهان در رده‌بندی فورچون (Fortune) به کار گرفته است. Lewis و Sexton (۲۰۰۳) عملکرد لیگ برتر بیس‌بال را در یک فرآیند دومرحله‌ای بررسی کرده‌اند.

Seiford و Zhu در مقاله‌ی خود رویکرد استاندارد DEA را برای هر مرحله به کار گرفته‌اند، ولی تعارضات بالقوه بین دو مرحله را که از اندازه‌های حد واسط ناشی شده است، در نظر نگرفته‌اند. مثلاً مرحله‌ی دوم ممکن است برای رسیدن به وضعیت کارا، نیاز به کاهش ورودی‌های خود (اندازه‌های بینابینی) داشته باشد. ولی چنین کاری به معنای کاهش خروجی‌های مرحله‌ی اول خواهد بود که کارایی آن مرحله را کاهش می‌دهد.

برخی از مطالعات DEA در تلاش برای پرداختن به این نوع تعارض ایجاد شده‌اند. مثلاً رویکرد DEAی شبکه‌ای Färe و Whittaker (۱۹۹۵)، Färe و Grosskopf (۱۹۹۶)، و Färe و Grosskopf (۲۰۰۰) توسط Lewis و Sexton (۲۰۰۴) برای محاسبه‌ی نمرات کارایی زیرواحدها به کار گرفته شده است. رویکرد Sexton و Lewis (۲۰۰۳) به کار بردن روشی مشابه روش Seiford و Zhu (۱۹۹۹) است (هر چند که از مدل DEAی با ماهیت خروجی استفاده می‌کند)، و بعد یک نمره‌ی کارایی کلی را با استفاده از نسبت خروجی‌های مرحله‌ی دوم به خروجی‌های «تصویرسازی شده‌ی» مرحله‌ی اول پیشنهاد می‌کنند. کارهای مرتبطی توسط Pendharkar و همکاران (۲۰۰۰) و Pendharkar و Rodger (۲۰۰۹) با استفاده از طبقه‌بندی کننده‌های شبکه‌ای بی‌بی (Bayesian) در محیط DEA، برای کاوش الگوهای سرطان سینه، ارائه شده است. Kao و Hwang (۲۰۰۸) رویکرد متفاوتی را ارائه کرده‌اند که در آن تمام فرآیند دومرحله‌ای را می‌توان به حاصلضرب کارایی‌های دو زیرفرآیند تجزیه کرد. در نتیجه، هم کارایی کلی و هم کارایی هر مرحله به دست می‌آید.

همچنین، مطالعات DEAی دیگری نیز هستند که با مراحل متعدد یا DMUهای متعدد با ساختارهای داخلی سر و کار دارند. برای مرور بسیار خوبی از رویکردهای مختلف DEA در کار با ساختارهای داخلی DMUها، به Castelli و همکاران (زیر چاپ) مراجعه کنید. در مطالعه‌ی حاضر، ما روی یک حالت خاص و معمول فرآیند دومرحله‌ای تمرکز می‌کنیم، که در آن تمام خروجی‌های مرحله‌ی اول اندازه‌های بینابینی هستند (هیچ چیزی در اینجا از سیستم خارج نمی‌شود)، و همه‌ی آنها تبدیل به ورودی‌های مرحله‌ی دوم می‌شوند.

به طوری که برخی از مؤلفان، منجمله Kao و Hwang (۲۰۰۸)، Lewis و Sexton (۲۰۰۴)، و Castelli و همکاران (زیر چاپ)، اشاره کرده‌اند، تعدیل ورودی‌ها و خروجی توسط نمرات رک در یک فرآیند دومرحله‌ای عموماً برای به دست آوردن تصویر مرز کافی نیست. Chen و همکاران (۲۰۰۹) مدلی شبیه مدل Kao و Hwang (۲۰۰۸)، ولی به صورت جمعی، ارائه کرده‌اند. ولی همانند روش ضربی، تعدیل‌های معمول ورودی و خروجی نیز در اینجا مرز کارایی را به دست نمی‌دهند. برای بسیاری از موارد که در رابطه با DMUهای ساختاردار در مقالات DEA مورد بررسی قرار گرفته‌اند، وضعیت به این صورت است.

در قسمت‌های زیر، نشان می‌دهیم که نمرات کارایی کلی به دست آمده از روش Kao و Hwang (۲۰۰۸) نشانگرهای

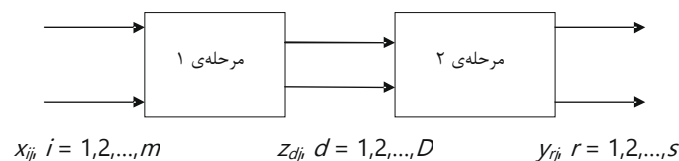
مستقیم کاهش‌های بالقوه‌ی ورودی یا افزایش خروجی محقق نشده توسط DMUهای ناکارا نیستند، یعنی اینکه هر DMU با توجه به سطح ورودی فعلی خود چقدر خروجی دیگر می‌تواند تولید کند، و یا اینکه هر DMU ضمن حفظ سطح فعلی خروجی خود، قدر دیگر می‌تواند ورودی خود را کاهش دهد. به عبارت دیگر، نمرات DEAی به دست آمده اطلاعات کاملی را در مورد اینکه DMUهای ناکارا را چگونه می‌توان برای یک فرآیند دومرحله‌ای خاص روی مرز DEA تصویر کرد، ارائه نمی‌کنند. با آنکه نمرات کارایی را می‌دانیم، ولی هنوز نمی‌دانیم که مرز DEA کجا است.

مقاله‌ی حاضر رویکردی را برای تعیین مرز DEA یا تصویرهای DEA برای DMUهای ناکارا تحت چارچوب Kao و Hwang (۲۰۰۸) ایجاد می‌کند. قسمت ۲ فرآیند دومرحله‌ای عمومی و مدل Kao و Hwang (۲۰۰۸) را ارائه می‌کند. در قسمت ۳، مجدداً مثال کاربردی آنها در مورد شرکت‌های بیمه‌ی غیرعمر تایوان را بررسی می‌کنیم. و این مطلب را نشان می‌دهیم که هیچکدام از DMUها کارا نیستند. یعنی تصاویر معمول DEA قادر نیستند مرز را شناسایی کنند. بعد رویکردی را برای تعیین مرز DEA برای فرآیندهای دومرحله‌ای ایجاد می‌کنیم و آن را با مجموعه‌ی داده‌های پیشگفته نمایش می‌دهیم. نتیجه‌گیری‌ها در قسمت ۵ ارائه می‌شوند.

۲- مدل‌های DEA با ماهیت ورودی و خروجی برای فرآیندهای دومرحله‌ای

یک فرآیند دومرحله‌ای عمومی را که در شکل ۱ نشان داده شده است، برای مجموعه‌ای از n DMU در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که هر DMU_j ($j=1,2,\dots,n$) در مرحله‌ی اول دارای m ورودی x_{ij} ($i=1,2,\dots,m$) است، و D خروجی z_{dj} ($d=1,2,\dots,D$) از آن مرحله دارد. سپس این D خروجی تبدیل به ورودی‌های مرحله‌ی دوم می‌شوند، و لذا به عنوان اندازه‌های بینابینی عمل می‌کنند. خروجی‌های ماشین مرحله‌ی دوم y_{rj} ($r=1,2,\dots,S$) هستند.

$DMU_j, j=1,2,\dots,n$



شکل ۱: فرآیند دومرحله‌ای.

۲-۱- ماهیت ورودی

برای DMU_j ، نسبت‌های کارایی را به صورت θ_j^1 برای مرحله‌ی اول و θ_j^2 برای مرحله‌ی دوم نشان می‌دهیم. بر اساس مدل DEAی با ماهیت ورودی Charnes و همکاران (۱۹۷۸)، تعریف می‌کنیم:

$$(۱) \quad \theta_j^2 = \frac{\sum_{r=1}^S u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^D \tilde{w}_d z_{dj}} \quad \text{و} \quad \theta_j^1 = \frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}$$

که در اینجا $v_i, w_d, \tilde{w}_d, u_r$ وزن‌های نامنفی ناشناخته هستند. فرض می‌شود که مقادیر w_d همانند Kao و Hwang (۲۰۰۸) برابر با \tilde{w}_d منظور شده‌اند. در نتیجه، نسبت رک کلی دومرحله‌ای به صورت $\theta_j^1 \cdot \theta_j^2$ تعریف می‌شود، که برابر است

با $\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^S u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}$. θ_j برای محاسبه‌ی کارایی کلی θ_j ، Kao و Hwang (۲۰۰۸) مدل زیر را ارائه می‌کنند:

$$(۲) \quad \begin{aligned} \text{Max } \theta_j^1 \cdot \theta_j^2 &= \frac{\sum_{r=1}^S u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \\ \text{s.t. } \theta_j^1 &< 1, \theta_j^2 \leq 1, w_d = \tilde{w}_d \end{aligned}$$

با اعمال تبدیل معمول، مدل (۲) را می‌توان به برنامه‌ی خطی زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned}
 (۳) \quad & \text{Max} \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} \\
 & \text{s.t.} \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} \leq 0 \quad j=1,2,\dots,n \\
 & \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j=1,2,\dots,n \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1 \\
 & w_d \geq 0, d=1,2,\dots,D \quad v_i \geq 0, i=1,2,\dots,m \quad u_r \geq 0, r=1,2,\dots,s
 \end{aligned}$$

دقت کنید که قیود $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0$ در مدل Hwang و Kao (۲۰۰۸) زاید هستند، زیرا $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0$ متضمن $\sum_{d=1}^D w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0$ و $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} \leq 0$ است. دوال مدل (۳) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 (۴) \quad & \text{Min } \theta \\
 & \text{s.t.} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i0} \quad i=1,2,\dots,m \\
 & \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq y_{r0} \quad r=1,2,\dots,s \\
 & \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \mu_j) z_{dj} \geq 0 \quad d=1,2,\dots,D \\
 & \lambda_j, \mu_j \geq 0 \quad \theta \leq 1
 \end{aligned}$$

۲-۲- ماهیت خروجی

نمونه‌ی با ماهیت خروجی مدل فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 (۵) \quad & \text{Min } \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}} \\
 & \text{s.t.} \theta_j^1 < 1, \theta_j^2 \leq 1 \quad \forall j \\
 & w_d = \tilde{w}_d \quad \forall d
 \end{aligned}$$

که معادل با فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی زیر است:

$$\begin{aligned}
 (۶) \quad & \text{Min } \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} \\
 & \text{s.t.} \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} \leq 0 \quad j=1,2,\dots,n \\
 & \sum_{d=1}^D w_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} < 0 \quad j=1,2,\dots,n \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} = 1 \\
 & w_d, d=1,2,\dots,D \quad v_i, i=1,2,\dots,m \quad u_r, r=1,2,\dots,s \geq 0
 \end{aligned}$$

دوال مدل (۶) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \phi \\
 & \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \quad i=1,2,\dots,m \\
 & \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq \phi y_{ro} \quad r=1,2,\dots,m \\
 & \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \mu_j) z_{dj} \geq 0 \quad d=1,2,\dots,D \\
 & \lambda_j, \mu_j \geq 0 \quad \phi \geq 1
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

دقت کنید که هر دو مدل DEA دومرحله‌ای با ماهیت ورودی و خروجی (۴) و (۷) در صورت $\lambda_j = \mu_j$ معادل با مدل پوششی DEA استاندارد هستند.

Kao و Hwang (۲۰۰۸) برای نشان دادن مدل خود یک مثال عددی با است، DMU A، B، و C ارائه کرده‌اند که به ترتیب در مرحله‌ی اول ۲، ۴، و ۵ واحد ورودی X مصرف می‌کنند و در مرحله‌ی اول ۱.۵، ۴، و ۴ واحد خروجی محصول بینایی Z تولید می‌کنند، که به نوبه‌ی خود تبدیل به ورودی مرحله‌ی ۲ می‌شود تا ۱.۵، ۵، و ۶ واحد خروجی Y در این مرحله ایجاد شود. نشان داده می‌شود که DMU A نمره‌ی کلی ۰.۵ دارد، که نشان می‌دهد که این DMU خواهد توانست در صورت استفاده‌ی کارآمد از ورودی‌های خود، دو برابر خروجی تولید کند. در این مثال، نمره‌ی کارایی کلی DEA نشان می‌دهند که هر DMU با ورودی‌های فعلی خود چه میزان خروجی بیشتر می‌تواند تولید کند، یا با حفظ خروجی فعلی، چه میزان می‌تواند ورودی‌های خود را بیشتر کاهش دهد، یعنی ناکارایی به دست آمده از مدل (۴) (یا (۷)) می‌خواهد نقاط مرز DEA را شناسایی کند. بحث زیر نشان می‌دهد که این درست نیست، و بنا بر این، ما به مدل‌های دیگری برای تعیین نقاط مرز فرآیندهای دومرحله‌ای نیاز داریم.

۳- مرز DEA

در اینجا کاربرد دومرحله‌ای مربوط به ۲۴ شرکت بیمه‌ی غیرعمر را که در Kao و Hwang (۲۰۰۸) ذکر شده است، دوباره بررسی می‌کنیم. دو مرحله نشان دهنده‌ی کسب حق بیمه و تولید سود هستند. ورودی‌های مرحله‌ی اول هزینه‌های عملیاتی و هزینه‌های بیمه هستند، و خروجی‌های مرحله‌ی دوم سود ضمانت و سود سرمایه‌گذاری هستند. بین دو مرحله دو اندازه‌ی بینایی وجود دارند، یعنی حق بیمه‌ی مستقیم و حق بیمه‌ی مجدد (برای جزئیات این دو اندازه، رک. Kao و Hwang (۲۰۰۸)). داده‌ها در جدول ۱ نشان داده شده‌اند.

جدول ۱: مجموعه‌ی داده‌ها.

DMU		هزینه‌های عملیاتی (X1)	هزینه‌های بیمه (X2)	حق بیمه‌ی مستقیم (Z1)	حق بیمه‌ی مجدد (Z2)	سود ضمانت (Y1)	سود سرمایه‌گذاری (Y2)
۱	Taiwan Fire	۱,۱۷۸,۷۴۴	۶۷۳,۵۱۲	۷,۴۵۱,۷۵۷	۸۵۶,۷۳۵	۹۸۴,۱۴۳	۶۸۱,۶۸۷
۲	Chung Kuo	۱,۳۸۱,۸۲۲	۱,۳۵۲,۷۵۵	۱۰,۰۲۰,۲۷۴	۱,۸۱۲,۸۹۴	۱,۲۲۸,۵۰۲	۸۳۴,۷۵۴
۳	Tai Ping	۱,۱۷۷,۴۹۴	۵۹۲,۷۹۰	۴,۷۷۶,۵۴۸	۵۶۰,۲۴۴	۲۹۳,۶۱۳	۶۵۸,۴۲۸
۴	China Mariners	۶۰۱,۳۲۰	۵۹۴,۲۵۹	۳,۱۷۴,۸۵۱	۳۷۱,۸۶۳	۲۴۸,۷۰۹	۱۷۷,۳۳۱
۵	Fubon	۶۶۹۹,۰۶۳	۳,۵۳۱,۶۱۴	۳۷,۳۹۲,۸۶۲	۱,۷۵۳,۷۹۴	۷,۸۵۱,۲۲۹	۳,۹۲۵,۲۷۲
۶	Zurich	۲,۶۲۷,۷۰۷	۶۶۸,۳۶۳	۹,۷۴۷,۹۰۸	۹۵۲,۳۲۶	۱,۷۱۳,۵۹۸	۴۱۵,۰۵۸
۷	Taian	۱,۹۴۳,۸۳۳	۱,۴۴۳,۱۰۰	۱۰,۶۸۵,۴۵۷	۶۴۳,۴۱۲	۲,۲۳۹,۵۹۳	۴۳۹,۰۲۹
۸	Ming Tai	۳,۷۸۹,۰۰۱	۱,۸۷۳,۵۳۰	۱۷,۲۶۷,۲۶۶	۱,۱۳۴,۶۰۰	۳,۸۹۹,۵۳۰	۶۲۲,۸۶۸
۹	Central	۱,۵۶۷,۷۴۶	۹۵۰,۴۳۲	۱۱,۴۷۳,۱۶۲	۵۴۶,۳۳۷	۱,۰۴۳,۷۷۸	۲۶۴,۰۹۸
۱۰	The First	۱,۳۰۳,۲۴۹	۱,۲۹۸,۴۷۰	۸,۲۱۰,۳۸۹	۵۰۴,۵۲۸	۱,۶۹۷,۹۴۱	۵۵۴,۸۰۶
۱۱	Kuo Hua	۱,۹۶۲,۴۴۸	۶۷۲,۴۱۴	۷,۲۲۲,۳۷۸	۶۴۳,۱۷۸	۱,۴۸۶,۰۱۴	۱۸,۲۵۹
۱۲	Union	۲,۵۹۲,۷۹۰	۶۵۰,۹۵۲	۹,۴۳۴,۴۰۶	۱,۱۱۸,۴۸۹	۱,۵۷۴,۱۹۱	۹۰۹,۲۹۵

DMU	هزینه‌های عملیاتی (X1)	هزینه‌های بیمه (X2)	حق بیمه‌ی مستقیم (Z1)	حق بیمه‌ی مجدد (Z2)	سود ضمانت (Y1)	سود سرمایه‌گذاری (Y2)
Shingkong	۲,۶۰۹,۹۴۱	۱,۳۶۸,۸۰۲	۱۳,۹۲۱,۴۶۴	۸۱۱,۳۴۳	۳,۶۰۹,۲۳۶	۲۲۳,۰۴۷
South China	۱,۳۹۶,۰۰۲	۹۸۸,۸۸۸	۷,۳۹۶,۳۹۶	۴۶۵,۵۰۹	۱,۴۰۱,۲۰۰	۳۳۲,۲۸۳
Cathay Century	۲,۱۸۴,۹۴۴	۶۵۱,۰۶۳	۱۰,۴۲۲,۲۹۷	۷۴۹,۸۹۳	۳,۳۵۵,۱۹۷	۵۵۵,۴۸۲
Allianz President	۱,۳۱۱,۷۱۶	۴۱۵,۰۷۱	۵,۶۰۶,۰۱۳	۴۰۲,۸۸۱	۸۵۴,۰۵۴	۱۹۷,۹۴۷
Newa	۱,۴۵۳,۷۹۷	۱,۰۸۵,۰۱۹	۷,۶۹۵,۴۶۱	۳۴۲,۴۸۹	۳,۱۴۴,۴۸۴	۳۷۱,۹۸۴
AIU	۷۵۷,۵۱۵	۵۴۷,۹۹۷	۳,۶۳۱,۴۸۴	۹۹۵,۶۲۰	۶۹۲,۷۳۱	۱۶۳,۹۲۷
North America	۱۵۹,۴۲۲	۱۸۲,۳۳۸	۱,۱۴۱,۹۵۱	۴۸۳,۲۹۱	۵۱۹,۱۲۱	۴۶,۸۵۷
Federal	۱۴۵,۴۴۲	۵۳,۵۱۸	۳۱۶,۸۲۹	۱۳۱,۹۲۰	۳۵۵,۶۲۴	۲۶,۵۳۷
Royal & Sunalliance	۸۴,۱۷۱	۲۶,۲۲۴	۲۲۵,۸۸۸	۴۰,۵۴۲	۵۱,۹۵۰	۶۴۹۱
Aisa	۱۵,۹۹۳	۱۰,۵۰۲	۵۲,۰۶۳	۱۴,۵۷۴	۸۲,۱۴۱	۴۱۸۱
AXA	۵۴,۶۹۳	۲۸,۴۰۸	۲۴۵,۹۱۰	۴۹,۸۶۴	۰.۱	۱۸,۹۸۰
Mitsui Sumitomo	۱۶۳,۲۹۷	۲۳۵,۰۹۴	۴۷۶,۴۱۹	۶۴۴,۸۱۶	۱۴۲,۳۷۰	۱۶,۹۷۶

منبع: Hwang و Kao (۲۰۰۸).

ستون‌های دوم و سوم جدول ۲ به ترتیب نمرات کارایی کلی به دست آمده از مدل (۴) و (۷) را نشان می‌دهند. می‌توان دید که برای همه‌ی DMUها $\theta_j^* = 1/\phi_j^*$ ، که بر اساس شرط بازده به مقیاس ثابت (CRS) همین انتظار نیز می‌رود. همانند رویکرد استاندارد DEA، ما ابتدا تصاویر DEA را با ضرب کردن ورودی‌ها (خروجی‌ها)ی کنونی در مقادیر بهینه‌ی مربوطه (ϕ^*) ضمن ثابت نگه داشتن اندازه‌های بینابینی به دست می‌آوریم. بعد این تصاویر DEA را در مدل‌های (۴) و (۷) اعمال می‌کنیم تا کارا بودن آنها را بررسی کنیم. دقت کنید که مقاله‌ی حاضر اسلک‌های بالقوه‌ی DEA را در تصاویر در نظر نمی‌گیرد.

جدول ۲: نمرات DEA.

DMU	ماهیت ورودی	ماهیت خروجی	نمرات کارایی برای DMUهای تصویر شده					
			حالت I ^a			حالت II ^b		
			ماهیت ورودی	ماهیت خروجی	معکوس نمره‌ی ماهیت خروجی	ماهیت ورودی	ماهیت خروجی	معکوس نمره‌ی ماهیت خروجی
۱	۰.۶۹۹۲	۱.۴۳۰۱	۰.۲۲۰۲	۱.۴۲۲۲	۰.۶۷۹۲	۰.۷۱۳۴	۱.۰۰۷۵	۱.۴۰۱۸
۲	۰.۶۲۴۸	۱.۶۰۰۶	۰.۲۲۹۶	۱.۵۶۳۴	۰.۶۳۹۶	۰.۶۲۷۵	۱.۰۰۱۵	۱.۵۹۳۷
۳	۰.۶۹۰۰	۱.۴۴۹۲	۰.۲۲۰۶	۱.۴۴۹۲	۰.۶۹۰۰	۱	۱.۴۴۹۲	۱
۴	۰.۳۰۴۲	۳.۲۸۷۱	۰.۲۲۹۵	۱.۵۶۱۴	۰.۶۴۰۵	۰.۴۳۲۳	۱.۳۸۰۵	۲.۳۱۳۱
۵	۰.۷۶۷۰	۱.۳۰۳۸	۰.۲۱۹۹	۱.۴۸۴۳	۰.۶۷۳۷	۰.۹۷۳۸	۱.۱۹۴۰	۱.۰۲۶۹
۶	۰.۳۸۹۷	۲.۵۶۶۲	۰.۲۳۶۴	۱.۶۲۲۰	۰.۶۱۶۵	۰.۴۰۵۷	۱.۰۳۷۷	۲.۴۶۵۱
۷	۰.۲۷۶۶	۳.۶۱۵۶	۰.۲۲۲۹	۱.۵۴۰۵	۰.۶۴۹۱	۰.۵۳۷۸	۱.۳۲۹۶	۱.۸۵۹۳
۸	۰.۲۷۵۲	۳.۶۳۴۱	۰.۲۱۷۷	۱.۵۶۶۵	۰.۶۳۸۴	۰.۵۱۱۳	۱.۳۷۸۲	۱.۹۵۵۶
۹	۰.۲۲۳۳	۴.۴۷۸۷	۰.۲۱۹۲	۱.۵۲۲۶	۰.۶۵۶۸	۰.۲۹۲۰	۱	۳.۴۲۵۱
۱۰	۰.۴۶۶۰	۲.۱۴۶۱	۰.۲۳۱۱	۱.۶۱۱۷	۰.۶۲۰۵	۰.۶۶۲۷	۱.۱۶۰۷	۱.۵۰۹۰
۱۱	۰.۱۶۳۹	۶.۱۰۰۵	۰.۱۹۶۵	۱.۷۲۹۲	۰.۵۷۸۳	۰.۳۲۶۷	۱.۳۵۰۴	۳.۰۶۱۲
۱۲	۰.۷۵۹۶	۱.۳۱۶۵	۰.۲۳۶۶	۱.۵۱۳۵	۰.۶۶۰۷	۰.۷۵۹۶	۱	۱.۳۱۶۵
۱۳	۰.۲۰۷۸	۴.۸۱۲۱	۰.۲۰۵۳	۱.۷۴۴۷	۰.۵۷۳۲	۰.۵۴۳۵	۱.۲۳۳۵	۱.۸۴۰۰
۱۴	۰.۲۸۸۶	۳.۴۶۴۵	۰.۲۱۹۲	۱.۵۲۶۱	۰.۶۵۵۳	۰.۵۱۷۸	۱.۳۸۰۰	۱.۹۳۱۲
۱۵	۰.۶۱۳۸	۱.۶۲۹۱	۰.۲۲۹۵	۱.۷۴۵۱	۰.۵۷۳۰	۰.۷۰۴۷	۱	۱.۴۱۹۰
۱۶	۰.۳۲۰۲	۳.۱۲۳۵	۰.۲۲۳۳	۱.۶۰۸۲	۰.۶۲۱۸	۰.۳۸۴۷	۱.۱۰۲۳	۲.۵۹۹۱
۱۷	۰.۳۶۰۰	۲.۷۷۷۷	۰.۲۱۸۱	۱.۵۹۰۱	۰.۶۲۸۹	۰.۸۰۶۶	۱.۳۸۲۵	۱.۲۳۹۷
۱۸	۰.۲۵۸۸	۳.۸۶۳۴	۰.۲۲۰۹	۱.۵۲۶۰	۰.۶۵۵۳	۰.۳۷۲۷	۱.۲۶۰۲	۲.۶۷۶۲

DMU	ماهیت ورودی	ماهیت خروجی	نمرات کارایی برای DMUهای تصویر شده					
			حالت I ^a			حالت II ^b		
			ماهیت ورودی	ماهیت خروجی	معکوس نمره‌ی ماهیت خروجی	ماهیت ورودی	ماهیت خروجی	معکوس نمره‌ی ماهیت خروجی
۱۹	۰.۴۱۱۲	۲.۴۳۱۹	۰.۲۳۶۷	۱.۷۴۹۵	۰.۵۷۱۶	۰.۴۱۵۸	۱	۲.۴۰۵۱
۲۰	۰.۵۴۶۶	۱.۸۲۹۷	۰.۲۰۹۳	۱.۸۳۴۱	۰.۵۴۵۲	۰.۷۸۹۱	۱.۰۷۱۶	۱.۲۶۷۳
۲۱	۰.۲۰۰۸	۴.۹۸۰۶	۰.۲۲۵۱	۱.۸۰۱۵	۰.۵۵۵۱	۰.۲۷۹۵	۱.۳۳۲۴	۳.۵۷۷۷
۲۲	۰.۵۸۹۵	۱.۶۹۶۳	۰.۲۱۲۲	۱.۶۹۶۳	۰.۵۸۹۵	۱	۱.۶۹۶۳	۱
۲۳	۰.۴۲۰۳	۲.۳۷۹۰	۰.۲۲۰۶	۱.۴۴۹۲	۰.۶۹۰۰	۰.۵۵۹۹	۱.۱۷۶۴	۱.۷۸۶۰
۲۴	۰.۱۳۴۸	۷.۴۱۷۸	۰.۲۳۵۱	۱.۷۲۹۷	۰.۵۷۸۱	۰.۳۳۵۱	۱.۲۶۵۲	۲.۹۸۴۳

^a حالت I: همه‌ی DMUها با تصویر خود جایگزین می‌شوند.

^b حالت II: فقط DMUی مورد ارزیابی با تصویر خود جایگزین می‌شود و بقیه‌ی DMUها بدون تغییر باقی می‌مانند.

ما دو حالت را در نظر می‌گیریم. در حالت I، تمام DMUها ابتدا با DMUهای تصویر شده جایگزین می‌شوند، و بعد مدل‌های (۴) و (۷) اعمال می‌شوند. یعنی در مدل (۴)، برای هر j ، x_{1j} و x_{2j} با $\theta_j^* x_{1j}$ و $\theta_j^* x_{2j}$ جایگزین می‌شوند، و همه‌ی اندازه‌های بینابینی و خروجی‌ها بدون تغییر باقی می‌مانند، و در مدل (۷)، برای هر j ، y_{1j} و y_{2j} با $\phi_j^* y_{1j}$ و $\phi_j^* y_{2j}$ جایگزین می‌شوند، و همه‌ی اندازه‌های بینابینی و ورودی‌ها بدون تغییر باقی می‌مانند. ستون چهارم جدول ۲ نمرات با ماهیت ورودی به دست آمده از مدل (۴) و ستون پنجم جدول ۲ نمرات با ماهیت خروجی به دست آمده از مدل (۷) را نشان می‌دهد. می‌توان دید که هیچکدام از DMUهای تصویر شده کارا نیستند. همچنین، می‌توان دید که θ_j^* به دست آمده‌ی جدید دیگر برابر با $1/\phi_j^*$ نیست.

در حالت II، تنها DMUی مورد ارزیابی را با تصویر آن در مدل‌های (۴) و (۷) جایگزین می‌کنیم. یعنی مدل‌های (۴) و (۷) را بر DMU_o تصویر شده اعمال می‌کنیم، و داده‌های سایر DMU_j ($j \neq o$) بدون تغییر باقی می‌مانند. ستون هفتم جدول ۲ نمرات با ماهیت ورودی به دست آمده از مدل (۴) را گزارش می‌کند، و ستون هشتم جدول ۲، نمرات با ماهیت خروجی به دست آمده از مدل (۷) را نشان می‌دهد. می‌توان دید که به جز DMUهای ۳ و ۲۲ (تحت شرط ماهیت ورودی)، و DMUهای ۹، ۱۲، ۱۵، و ۱۹ (تحت شرط با ماهیت خروجی)، هیچکدام از DMUهای تصویر شده کارایی نیستند. همچنین، مدل‌های (۴) و (۷) DMUهای کارای یکسانی را شناسایی نمی‌کنند. همچنین، می‌توان دید که نمره‌ی با ماهیت خروجی، به طوری که در شرط CRS انتظار می‌رود، برای همه‌ی DMUها برابر با معکوس نمره‌ی با ماهیت ورودی نیست.

تحت رویکرد استاندارد DEA، حالت I و حالت II باید نتایج یکسانی به دست بدهند. اما در هر دو مدل (۴) و (۷)، حالت I و حالت II نتایج بسیار متفاوتی ایجاد می‌کنند. لذا مدل‌های (۴) و (۷) فقط یک نمره‌ی کارایی کلی ایجاد می‌کنند، ولی قادر نیستند اطلاعات کاملی در مورد چگونگی تصویر کردن DMUهای ناکارا روی مرز DEA به ما بدهند.

برای حل این مشکل، مدلی را پیشنهاد می‌کنیم که معادل مدل (۴) (یا (۷)) است، و مجموعه‌ای از ورودی‌ها، خروجی‌ها، و اندازه‌های بینابینی جدید ایجاد می‌کند که نشان دهنده‌ی یک نقطه (یا تصویر) کارا تحت مدل (۴) (یا (۷)) هستند. برای این منظور، مدل با ماهیت ورودی (۴) را در نظر بگیرید. برای هر DMU_o ، متغیر \tilde{z}_{do} ($d=1, \dots, D$) را وارد می‌کنیم، که نشان دهنده‌ی مجموعه‌ای از اندازه‌های بینابینی جدید است که باید تعیین شوند. بعد این قیود $\sum_{j=1}^n (\lambda_j - \mu_j) z_{dj} \geq 0$ را به دو مجموعه‌ی جدید قیود تجزیه می‌کنیم:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{dj} \geq \tilde{z}_{do} \quad d=1, \dots, D$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j z_{dj} \leq \tilde{z}_{do} \quad d=1, \dots, D$$

مجموعه‌ی اول قیود، مقادیر \tilde{z}_{do} را به عنوان «خروجی» در نظر می‌گیرد، و مجموعه‌ی دوم مقادیر \tilde{z}_{do} را به عنوان «ورودی»

در نظر می‌گیرد. اکنون مدل DEA ی زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 (۸) \quad & \min \tilde{\theta} \\
 & \text{s.t.} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \tilde{\theta} x_{io} \quad i=1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r=1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{dj} \geq \tilde{z}_{do} \quad d=1, \dots, D \\
 & \sum_{j=1}^n \mu_j z_{dj} \leq \tilde{z}_{do} \quad d=1, \dots, D \\
 & \tilde{z}_{do} \geq 0 \quad d=1, \dots, D \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \\
 & \mu_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \\
 & \tilde{\theta} \leq 1
 \end{aligned}$$

نشان خواهیم داد که مدل (۸) و مدل (۴) نمره‌ی کارایی یکسانی به دست می‌دهند، و مدل (۸) یک تصویر کارا ایجاد می‌کند. دوال مدل (۸) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 (۹) \quad & \text{Max} \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\
 & \text{s.t.} \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{d=1}^D w_d^2 z_{dj} \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, n \\
 & \sum_{d=1}^D w_d^1 z_{dj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \\
 & w_d^2 - w_d^1 \leq 0 \quad d=1, 2, \dots, D \\
 & w_d^1, w_d^2 \geq 0, d=1, 2, \dots, D \quad v_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m \quad u_r \geq 0, r=1, 2, \dots, s
 \end{aligned}$$

دقت کنید که در مدل (۸)، قیود $\tilde{z}_{do} \geq 0$ زاید هستند، لذا می‌توانیم $\tilde{z}_{do} \geq 0$ را حذف کنیم، تا \tilde{z}_{do} متغیرهای نامحدود باشند. آنگاه قید $w_d^2 - w_d^1 \leq 0$ ($d=1, 2, \dots, D$) در مدل (۹) تبدیل به $w_d^2 = w_d^1$ می‌شود، بدان معنا که ما به صورت یکسان با مدل (۲)، وزن w_d برای z_{dj} در هر دو موقعیت در نظر گرفته‌ایم (به عنوان خروجی مرحله ۱ و ورودی مرحله ۲). لذا مسئله‌ی (۹) فوق هم‌ارز با مسئله‌ی (۳) است. این باز نشان می‌دهد که مدل (۸) نمره‌ی کارایی کلی یکسان با مدل (۴) ایجاد می‌کند.

بر اساس مدل (۸)، نقطه‌ی تصویر برای DMU_o به صورت $(\tilde{\theta}^* x_{io}, \tilde{z}_{dj}^*, y_{ro})$ داده می‌شود، که تحت مدل‌های (۸) و (۴) کارا است، یعنی مقدار بهینه‌ی تابع هدف برای مدل (۸) برای این تصویر برابر با یک است. به طور مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که در حالت با ماهیت خروجی، مدل (۷) هم‌ارز با مدل زیر است:

$$\begin{aligned}
 (۱۰) \quad & \max \tilde{\phi} \\
 & \text{s.t.} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \quad i=1, \dots, m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} &\geq \tilde{\phi} y_{ro} \quad r=1, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{dj} &\geq \tilde{z}_{do} \quad d=1, \dots, D \\ \sum_{j=1}^n \mu_j z_{dj} &\leq \tilde{z}_{do} \quad d=1, \dots, D \\ \tilde{z}_{do} &\geq 0 \quad d=1, \dots, D \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j=1, \dots, n \\ \mu_j &\geq 0 \quad j=1, \dots, n \\ \phi &\geq 1 \end{aligned}$$

مدل (۱۰) مجموعه‌ای از ورودی‌ها، خروجی‌ها، و اندازه‌های بینابینی ایجاد می‌کند که DMU را تحت مدل (۷) کارا می‌کنند. برای مدل (۸) یا (۱۰)، می‌توان دید که علاوه بر نمرات کارایی کلی، باید مجموعه‌ای از مقادیر بهینه‌ی اندازه‌ی بینابینی (Z) به دست آوریم. مدل‌های (۴) و (۷) بلافاصله مجموعه‌ی مقادیر بهینه‌ی Z را که روی مرز DEA هستند، به ما نمی‌دهند، بلکه باید از مدل (۸) یا (۱۰) برای تعیین نقاط مرزی جهت فرآیند دومرحله‌ای استفاده کنیم. جدول ۳ اندازه‌های بینابینی بهینه را برای هر دو نوع ماهیت بر اساس مدل‌های (۸) و (۱۰) نشان می‌دهد. اگر DMUهای (تصویر شده‌ی) جدید را با اندازه‌های بینابینی نشان داده شده در جدول ۳ و $\theta_j^* x_{1j}$ و $\theta_j^* x_{2j}$ (یا $\phi_j^* y_{1j}$ و $\phi_j^* y_{2j}$) در حالت I یا II بر مدل (۴) یا (۷) اعمال کنیم، نمرات کارایی کلی همگی برابر با یک‌سویه هستند.

جدول ۳: اندازه‌های بینابینی بهینه برای مرز DEA

DMU	ماهیت ورودی (مدل ۸)		ماهیت خروجی (مدل ۱۰)	
	z1	z2	z1	z2
۱	۵,۱۲۹,۴۰۹	۶۷۳,۳۷۲.۷	۷,۳۳۵,۷۴۹	۹۶۳,۰۱۵.۶
۲	۶,۲۸۷,۵۰۲	۸۲۷,۷۸۲.۲	۱۰,۰۶۳,۷۴۲	۱,۳۲۴,۹۴۴
۳	۴,۷۷۶,۵۴۸	۵۶۰,۲۴۴	۶,۹۲۲,۳۳۱	۸۱۱,۹۲۴.۱
۴	۱,۳۳۲,۳۶۵	۱۷۴,۱۶۶.۴	۴,۳۷۹,۶۱۹	۵۷۲,۵۰۲.۸
۵	۳۰,۱۲۷,۳۶۴	۴,۱۷۷,۱۶۶	۳۹,۲۸۰,۳۷۴	۵,۴۴۶,۳۳۳
۶	۳,۸۰۷,۱۶۷	۴۳۵,۳۹۳.۸	۹,۷۶۹,۹۲۴	۱,۱۱۷,۳۰۴
۷	۳,۷۳۸,۲۸۷	۶۵۴,۰۴۵.۲	۱۳,۵۱۶,۲۹۰	۲,۳۶۴,۷۹۱
۸	۵,۵۵۳,۰۱۵	۱,۰۰۹,۰۰۷	۲۰,۱۸۰,۲۱۰	۳,۶۶۶,۸۳۲
۹	۲,۱۶۶,۵۷۶	۳۵۱,۷۹۳.۵	۹,۷۰۳,۱۹۱	۱,۵۷۵,۵۳۶
۱۰	۴,۴۱۷,۵۰۷	۶۷۱,۱۳۳.۱	۹,۴۸۰,۴۶۸	۱,۴۴۰,۳۲۷
۱۱	۹۴۱,۸۷۲.۵	۲۶۳,۶۵۸.۴	۵,۷۴۵,۷۹۶	۱,۶۰۸,۴۲۱
۱۲	۷,۱۶۶,۱۹۱	۸۴۹,۵۸۲.۴	۹,۴۳۴,۴۰۶	۱,۱۱۸,۴۸۹
۱۳	۲,۶۴۹,۲۹۷	۶۴۴,۳۹۹.۸	۱۲,۷۴۸,۷۲۲	۳,۱۰۰,۹۲۶
۱۴	۲,۷۴۹,۷۵۰	۴۵۴,۶۸۷.۷	۹,۵۲۶,۵۹۵	۱,۵۷۵,۲۸۰
۱۵	۵,۶۶۳,۷۵۰	۶۳۴,۶۶۷.۶	۹,۲۲۶,۹۱۵	۱,۰۳۳,۹۴۸
۱۶	۱,۸۹۹,۳۹۶	۱۸۸,۱۰۲.۵	۵,۹۳۲,۷۵۸	۵۸۷,۵۳۷.۶
۱۷	۳,۵۰۴,۹۰۰	۷۲۵,۲۷۲.۳	۹,۷۳۵,۵۱۶	۲,۰۱۴,۵۸۰
۱۸	۱,۳۵۶,۹۴۷	۲۲۴,۵۱۵.۲	۵,۲۴۲,۳۳۰	۸۶۷,۲۷۵.۷
۱۹	۴۷۴,۸۰۰	۱۰۸,۲۴۲	۱,۱۵۴,۶۷۹	۲۶۳,۲۳۶.۶
۲۰	۳۰۲,۹۶۴.۹	۶۳,۹۶۰.۳۸	۵۵۴,۳۲۶.۴	۱۱۷,۰۲۶.۵
۲۱	۶۸,۲۹۶	۹۶۱۰,۹۴۷	۳۴۰,۱۵۱.۷	۴۷,۸۶۷.۸
۲۲	۵۲,۰۶۳	۱۴,۵۷۴	۸۸,۳۱۳.۶۵	۲۴,۷۲۱.۶۵
۲۳	۱۳۷,۶۸۹.۹	۱۶,۱۴۹.۷۲	۳۲۷,۵۶۴.۳	۴۸,۴۲۰.۲

ماهیت خروجی (مدل ۱۰)		ماهیت ورودی (مدل ۸)		DMU
z2	z1	z2	z1	
۲۴۴,۳۶۶.۵	۱,۱۸۴,۲۰۶	۳۲,۹۴۳.۳۴	۱۵۹,۶۴۴.۲	۲۴

دقت کنید که در مدل‌های با ماهیت ورودی، برای DMUهای ۳ و ۲۲، مدل (۸) نشان می‌دهد که اندازه‌های بینابینی جدیداً به دست آمده برابر با مقادیر اولیه هستند. این امر بر اساس این واقعیت تأیید می‌شود که مدل (۴) DMUهای ۳ و ۲۲ را به عنوان کارا تحت حالت II شناسایی می‌کند. همین وضعیت برای DMUی ۱۲ تحت مدل‌های با ماهیت خروجی مشاهده می‌شود. در حالی که DMUهای ۹، ۱۵، و ۱۹ تحت مدل (۷) کارا هستند، مدل (۱۰) مجموعه‌ای از مقادیر بینابینی متفاوت را برای DMUهای ۹، ۱۵، و ۱۹ شناسایی می‌کند (به دو ستون آخر جدول ۳ نگاه کنید). این نشان می‌دهد که برای اندازه‌های بینابینی مدل‌های (۸) و (۱۰)، مقادیر بهینه‌ی متعدد وجود دارند. در واقع، اگر مدل (۱۰) را با استفاده از مقادیر بینابینی اولیه و $\phi_j^* y_{1j}$ و $\phi_j^* y_{2j}$ برای DMUهای ۹، ۱۵، و ۱۹ محاسبه کنیم، مدل (۱۰) نمره‌ی کارایی ۱۰ به دست می‌دهد.

۴- نتیجه‌گیری

این مقاله مدل‌هایی برای تعیین نقاط مرزی DEA (تصاویر) برای DMUهای ناکارا تحت چارچوب مدل DEA برای فرآیندهای دومرحله‌ای ارائه می‌کند. مطالعه‌ی حاضر مبتنی بر فرض بازده به مقیاس ثابت (CRS) است. Chen و همکاران (۲۰۰۹) تحت شرط بازده به مقیاس متغیر (VRS) یک مدل DEA دومرحله‌ای ایجاد کرده است که در آن کارایی کلی به صورت یک مجموع (وزنی) از کارایی‌های مراحل بیان می‌شود. گرچه نمرات کارایی کلی VRS و همچنین، نمرات هر کدام از مراحل را می‌توان با استفاده از روش Chen و همکاران (۲۰۰۹) به دست آورد، ولی تعدیل ورودی‌ها و خروجی‌ها بر حسب نمره‌ی کارایی برای به دست آوردن تصاویر مرز VRS کافی نیست. از آنجا که تمرکز Chen و همکاران (۲۰۰۹) بر تجزیه‌ی کارایی جمعی است، رویکرد جدید در مطالعه‌ی حاضر را نمی‌توان (به طور مستقیم) به کار برد. لذا برای ایجاد مدل‌هایی جهت تعیین نقاط مرزی DEA برای DMUهای ناکارای VRS، مطالعه‌ی بیشتر مورد نیاز است.

مدل ارائه شده معانی مهمی در عرصه‌هایی مانند مدیریت زنجیره‌ی تأمین دارد. با توجه به نیاز به درک بهتر زنجیره‌های تأمین و توانایی ارزیابی عملکرد اعضای زنجیره‌ی تأمین، ابزارهایی مانند روش ارائه شده در اینجا می‌توانند مفید باشند. مزیت این مدل این است که دقیقاً نشان می‌دهد نقاط ضعف و قدرت اینگونه سیستم‌های چندمرحله‌ای در کجا قرار دارد.

۵- منابع

- Castelli, L., Pesenti, R., & Ukovich, W. (2010). A classification of DEA models when the internal structure of the Decision Making Units is considered. *Annals of Operations Research*, 173, 207–235.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., 1978. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2, 429–444.
- Chen, Y., Cook, W.D., Li, N., Zhu, J., 2009. Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European Journal of Operational Research* 196, 1170–1176.
- Färe, R., Grosskopf, S., 1996. Productivity and intermediate products: A frontier approach. *Economics Letters* 50, 65–70.
- Färe, R., Grosskopf, S., 2000. Network DEA. *Socio-Economic Planning Sciences* 34, 35–49.
- Färe, R., Whittaker, G., 1995. An intermediate input model of dairy production using complex survey data. *Journal of Agricultural Economics* 46 (2), 201–213.
- Kao, C., Hwang, S.-N., 2008. Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research* 185 (1), 418–429.
- Lewis, H.F., Sexton, T.R., 2004. Network DEA: Efficiency analysis of organizations with complex internal structures. *Computers and Operations Research* 31 (9), 1365–1410.
- Pendharkar, P.C., Rodger, J.A., 2009. The relationship between software development team size and software development cost. *Communications of the ACM* 52 (2), 1–4.
- Pendharkar, P.C., Khosrowpour, M., Rodger, J.A., 2000. Application of Bayesian network classifiers and data envelopment analysis for mining breast cancer patterns. *Journal of Computer Information Systems* 4, 127–132.
- Seiford, L.M., Zhu, J., 1999. Profitability and marketability of the top 55 US commercial banks. *Management Science* 45 (9), 1270–1288.
- Sexton, T.R., Lewis, H.F., 2003. Two-stage DEA: An application to major league baseball. *Journal of Productivity Analysis*

19 (2-3), 227–249.
 Zhu, J., 2000. Multi-factor performance measure model with an application to Fortune 500 companies. *European Journal of Operational Research* 123 (1), 105–124.

Obtaining the data envelopment analysis frontier for two-stage structure

Somayyeh Rashid¹

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,
 Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Hossein Azizi

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,
 Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Shahruz Fathi Ajirlu

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Abstract

Data Envelopment Analysis (DEA) is an approach for measuring the efficiency of peer decision-making units (DMUs). DEA has been extended to evaluate the efficiency of two-stage processes, where the outputs of the first stage are the intermediate products that form the inputs of the second stage. The two-stage DEA model not only provides an overall efficiency score for the entire process but also gives an efficiency score for each stage. Due to the presence of intermediate products, the usual input and output adjustments, according to the standard DEA method, do not necessarily present a frontier image. This article proposes an approach to determine the frontier points for inefficient DMUs within the framework of two-stage DEA.

Keywords: Data envelopment analysis; efficiency; two-stage processes; intermediate products; frontier.

¹Corresponding Author