

تجزیه کارایی مبتنی بر تابع فاصله‌ی جهت‌دار در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای

سمیه رشید

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

حسین عزیزی

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

شهرروز فتحی اجیرلو

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

چکیده

مدل تابع فاصله جهت‌دار (DDF) مضربی شبکه‌ای که قادر به مدیریت داده‌های منفی است، در حوزه‌ی تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، مورد توجه اندکی قرار گرفته است. سیستم متوالی، نوعی مدل DDF مضربی شبکه‌ای پایه‌ای است. این مقاله، تحت فرض بازده به مقیاس متغیر، مدل DEA مضربی متوالی را برای استفاده با DDF گسترش می‌دهد. مدل DDF متوالی پیشنهادی، بدون ماهیت است و می‌تواند با داده‌های منفی سر و کار داشته باشد. امتیاز کارایی سیستم حاصل را می‌توان به‌عنوان میانگین وزنی امتیازهای کارایی فرایند، تجزیه کرد. در حوزه DDF، موضوع کارایی فرایند جایگزین احتمالی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین، مدل پیشنهادی می‌تواند برای فرض بازده به مقیاس ثابت (CRS) نیز اعمال شود. به علاوه، رابطه ریاضی بین فرم CRS مدل DDF متوالی و مدل CCR متوالی را به‌دست می‌آوریم. یک مثال تجربی، کاربرد و مزایای مدل جدید را نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، عملکرد

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده (DEA)^۱ یک تکنیک شناخته‌شده مبتنی بر داده، برای اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها)^۲ هم‌تا با ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد است (Charnes et al, 1978). از زمان اولین انتشار DEA، توسعه‌های نظری و کاربردهای فراوانی از آن در حوزه‌های مختلف از جمله بانک‌ها، بخش‌های بیمه و غیره گزارش شده است (Liu et al, 2013). مدل‌های متداول DEA، ساختارهای داخلی DMUها را در نظر نمی‌گیرند و سیستم تولید یک DMU را به‌عنوان یک جعبه سیاه در نظر می‌گیرند. در سال‌های اخیر، DEAی شبکه‌ای که موارد رخ داده در داخل سیستم تولید DMU را در نظر می‌گیرد، به یک حوزه مهم از DEA تبدیل شده است.

سیستم متوالی به عنوان یک سیستم شبکه‌ای پایه‌ای برای DMUها، از ساده‌ترین سیستم دو مرحله‌ای به دست می‌آید که مرحله اول از ورودی‌ها برای تولید محصولات بینابینی برای مرحله دوم استفاده می‌کند و در نتیجه، مرحله دوم نیز محصولات بینابینی مرحله اول را به عنوان ورودی برای تولید خروجی‌های خود، به کار می‌برد. در پژوهش‌های اولیه در مورد ساده‌ترین سیستم دو مرحله‌ای، دو کارایی فرایند DMUها، به طور جداگانه و مستقل محاسبه می‌شوند (Lovell et al, 1994; Seiford and Zhu, 1999; Wang et al, 1997). مدتی بعد، فیر (۱۹۹۱)، فیر و ویتاکر (۱۹۹۵)، فیر و گراسکوپف (۱۹۹۶) و لوئگرن و تامبور (۱۹۹۹)، عملیات‌های فرایندهای انفرادی را در ارزیابی کارایی‌هایی سیستم در نظر گرفتند (Färe, 1991; Färe and Whittaker, 1995; Färe and Grosskopf, 1996; Lothgren and Tambour, 1999). یک مدل DEA دو مرحله‌ای را با فرض CRS پیشنهاد کردند که می‌توان کارایی سیستم را در آن، به حاصل ضرب کارایی‌های دو فرایند، تجزیه کرد (Kao and Hwang, 2008). کائو و ليو (۲۰۱۱) نحوه محاسبه کارایی را در زمانی که مشاهدات با اعداد فازی نشان داده می‌شوند، مورد بحث قرار دادند (Kao and Liu, 2011). کائو و هوانگ (۲۰۱۱)، کارایی فنی و مقیاس را در یک فرایند دو مرحله‌ای تجزیه کردند. چن و همکاران (۲۰۰۹) یک رویکرد تجزیه کارایی جمعی را توسعه دادند که کارایی سیستم هر DMU در آن، به‌عنوان میانگین وزنی کارایی‌های فرایند، تجزیه می‌شود (Chen et al, 2009). متفاوت از رویکرد کائو و هوانگ (۲۰۰۸) که فقط می‌تواند تحت فرض CRS اعمال شود، رویکرد چن و همکاران (۲۰۰۹) را می‌توان تحت هر دو فرض CRS و VRS اعمال نمود. تجزیه کارایی در کائو و هوانگ (۲۰۰۸) و چن و همکاران (۲۰۰۹) را می‌توان به سیستم‌های متوالی با بیش از دو مرحله گسترش داد. برای کسب اطلاعات دقیق‌تر از DEAهایی که سیستم‌های متوالی را مورد مطالعه قرار می‌دهند (Kao, 2014b; Liu et al, 2016; An et al, 2019; Zhu et al, 2020) مراجعه کنید.

مطالعات DEAی شبکه‌ای فوق، توسط مدل‌های DEA با ماهیت ورودی یا خروجی، به عنوان مثال مدل CCR (Charnes et al, 1978) یا مدل BCC (Banker et al, 1984) توسعه داده شده‌اند که نمی‌توانند کارایی ورودی‌ها و خروجی‌ها را به طور هم‌زمان، اندازه‌گیری کنند. تابع فاصله‌ی جهت‌دار (DDF)^۳ (Chambers et al., 1996) و اندازه‌ی مبتنی بر اسلک (SBM) (Tone, 2001) می‌توانند کارایی ورودی‌ها و خروجی‌ها را به طور هم‌زمان، ارزیابی کنند. DDF در مقایسه با SBM، بدون هیچ‌گونه تبدیلی، خطی است به طوری که برای حل آن، به محاسبات کمتری نیاز است. همچنین، DDF این مزیت را دارد که فرم VRS آن، فقط با تعیین یک بردار جهت مناسب، می‌تواند داده‌های منفی را بدون اصلاح پیچیده داده‌ها، مدیریت کند. مدل اندازه جهت‌دار محدوده (RDM) (Portela et al, 2004)، گونه اندازه شعاعی (Cheng et al, 2013; Kerstens and Woestyne, 2014) و مدل‌های ابرکارایی مبتنی بر DDF اصلاح‌شده که توسط Lin و Chen (۲۰۱۷) و Liu و Lin (۲۰۱۹) مدل‌های VRS DDF هستند که می‌توانند با داده‌های منفی سر و کار داشته باشند.

Lu و همکاران (۲۰۱۴) با توجه به مزایای فوق DDF، چندین مدل پویا مبتنی بر DDF را برای برآورد کارایی عملیاتی و همچنین سودآوری اتحادیه‌های اعتباری مرتبط با انجمن‌های کشاورزان تایوان در دوره ۲۰۰۶-۲۰۱۱ معرفی کردند.

¹Data envelopment analysis (DEA).

²Decision-making units (DMUs).

³ Directional Distance Function (DDF).

Izadikhah و Saen (۲۰۱۶) یک مدل دو مرحله‌ای را بر اساس DDF طراحی کردند و آن را برای ارزیابی ۲۹ زنجیره تامین ایرانی تولید تجهیزات پزشکی یک بار مصرف، به کار بردند. Lin و همکاران (۲۰۱۷) یک مدل شبکه‌ای پویای مبتنی بر DDF را با متنوع‌سازی ارزیابی عملکرد چند دوره‌ای صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک پیشنهاد دارند. Tavana و همکاران (۲۰۱۸) یک مدل RDM دو مرحله‌ای را بر اساس DDF ارائه کردند و مدل پویای مربوطه را برای ارزیابی ۲۹ شعبه بانک ملی دیترویت ایجاد کردند. باید به این نکته اشاره نمود که مدل‌های پویا یا دو مرحله‌ای DDF فوق، تحت فرم پوششی، توسعه داده شده‌اند و می‌توانند با داده‌های منفی سر و کار داشته باشند. در پژوهش‌های موجود، مطالعات بسیار اندکی در مورد مدل‌های DDF مضربی شبکه‌ای صورت گرفته است. Wanke و همکاران (۲۰۱۸) یک مدل DDF دو مرحله‌ای مضربی را پیشنهاد کردند. این مدل، تحت فرم CRS ساخته شده است و نمی‌تواند با داده‌های منفی سر و کار داشته باشد. Lin و Liu (۲۰۲۱) یک مدل DDF پویای مضربی را توسعه دادند که می‌تواند با داده‌های منفی سر و کار داشته باشد. با این حال، چنین مدل پویایی بدون در نظر گرفتن ساختار شبکه‌ای فرایند تولید داخلی، فرایند تولید را در هر دوره، به‌عنوان یک جعبه سیاه در نظر می‌گیرد.

با توجه به توضیحات فوق، مدل مضربی مبتنی بر DDF که هم با داده‌های منفی سر و کار دارد و هم فرایند تولید داخلی را در نظر می‌گیرد، یک شکاف پژوهشی در پژوهش‌های موجود است. Chen و همکاران (۲۰۱۳) نشان دادند که مدل‌های مضربی و پوششی شبکه‌ای، با یکدیگر متناظر نیستند زیرا از مفاهیم کارایی متفاوتی استفاده می‌کنند و مدل‌های پوششی شبکه‌ای، تحت مفهوم نسبت کارایی DEA، لزوماً اطلاعاتی را در مورد کارایی فرایند ارائه نمی‌دهند. به علاوه، زمانی که محدودیت‌های مضربی وجود دارد که در عمل، ترجیحات تصمیم‌گیرندگان را منعکس می‌کند، استفاده از مدل‌های مضربی شبکه‌ای، ساده‌تر از مدل‌های پوششی شبکه‌ای است. بنابراین مطالعه مدل‌های مضربی شبکه‌ای مبتنی بر DDF، ضروری است. برای پر کردن شکاف‌های پژوهش‌های موجود، در این مقاله یک مدل DDF مضربی شبکه‌ای را برای سیستم متوالی پیشنهاد می‌کنیم.

این مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است: بخش ۲ به طور خلاصه به بررسی مدل DDF و مسئله دوگان آن می‌پردازد. بخش ۳ یک مدل DDF متوالی را تحت فرم مضربی، ایجاد می‌کند و تجزیه کارایی مربوطه را مورد بحث قرار می‌دهد. بردار جهت مدل DDF جدید نیز در این بخش، تعیین می‌شود. بخش ۴ رابطه بین فرم CRS مدل پیشنهادی و مدل CCR متوالی را ارائه می‌دهد. بخش ۵ از دو مثال برای شرح اعتبار و مزایای مدل پیشنهادی استفاده می‌کند. در نهایت، نتیجه‌گیری و پژوهش‌های آتی در بخش ۶ ارائه شده است.

۲- مدل DDF و مسئله دوگان آن

فرض کنید n تعداد DMU با I ورودی و O خروجی وجود دارد. ورودی i ام ($i = 1, \dots, I$) و خروجی r ام ($r = 1, \dots, O$) در DMU_j ($j = 1, \dots, n$) به ترتیب با x_{ij} و y_{rj} نشان داده می‌شوند. DDF (Chambers و همکاران، ۱۹۹۶)، بدون ماهیت است و می‌تواند پتانسیل یک DMU مفروض را برای افزایش خروجی‌ها و در عین حال کاهش ورودی‌ها به طور همزمان، منعکس کند. کارایی DDF تحت VRS در یک DMU_k ($k \in \{1, \dots, n\}$) را در امتداد یک بردار جهت نامنفی و غیرصفر (g_{ik}^x, g_{rk}^y) می‌توان با مدل زیر اندازه‌گیری کرد:

$$\begin{aligned} \max \quad & \rho_k \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} - \rho_k g_{ik}^x, \quad i = 1, \dots, I, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} + \rho_k g_{rk}^y, \quad r = 1, \dots, O, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad \forall i, r, j. \end{aligned} \quad (1)$$

امتیازهای کارایی اندازه‌گیری شده توسط مدل (۱)، به بردار جهت بستگی دارد. بردارهای جهت مختلف، ممکن است بر امتیازهای کارایی به‌دست‌آمده، تأثیر بگذارند. برای جلوگیری از تأثیر بردارهای جهت مختلف بر امتیازهای کارایی، (g_{ik}^x, g_{rk}^y) معمولاً قبل از به‌کارگیری مدل (۱)، از قبل تعیین می‌شود. در این مقاله، آن را به عنوان (x_{ik}, y_{rk}) برای مجموعه داده‌های غیرمنفی و محدوده بهبود احتمالی DMU_k (Portela و همکاران، ۲۰۰۴) یعنی $(x_{ik} - \min_j \{x_{ij}\}, \max_j \{y_{rj}\} - y_{rk})$ برای مجموعه داده با مقادیر منفی تعیین کرده‌ایم. اگر محدودیت $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ حذف شود، آنگاه فرم CRS مدل (۱) به دست می‌آید. با الهام از Ruiz (۲۰۱۳) و لین (۲۰۲۰)، مدل زیر را در نظر می‌گیریم که براساس مسئله دوگان مدل (۱) ساخته شده است:

$$\begin{aligned} \beta_k^* = \min & \sum_{i=1}^I v_i x_{ik} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rk} + \xi \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^I v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rj} + \xi \geq 0, \\ & j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^I v_i g_{ik}^x + \sum_{r=1}^O u_r g_{rk}^y = 1, \\ & v_i, u_r \geq \epsilon, \forall i, r, \xi \text{ is free}, \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن، ϵ یک بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی مثبت است. اگر مجموعه محدودیت $v_i, u_r \geq \epsilon, \forall i, r$ در مدل (۲) با $Zv_i, u_r \geq 0, \forall i, r$ جایگزین شود، آنگاه مسئله دوگان مدل (۱) به‌دست می‌آید. برای جلوگیری از نادیده گرفتن برخی اطلاعات ورودی‌ها و خروجی‌ها در ارزیابی عملکرد، ضرب‌ها را در اینجا به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که کمتر از ϵ نباشند. β_k^* را امتیاز کارایی DDF می‌نامیم که یک اندازه‌ی ناکارایی است. هر چه β_k^* بزرگ‌تر باشد، کارایی DMU_k کمتر است. اگر $\beta_k^* = 0$ باشد، آنگاه DMU_k کارا است. در غیر این صورت، ناکارا است. متغیر ξ متناظر با محدودیت $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ است. با توجه به اینکه مدل (۲)، مبتنی بر مسئله دوگان مدل (۱) است، قاعده تعیین بردار جهت مدل (۲)، دقیقاً مشابه با مدل (۱) است. یعنی اگر مجموعه داده ورودی-خروجی غیرمنفی باشد، آنگاه (g_{ik}^x, g_{rk}^y) در مدل (۲) را می‌توان با (x_{ik}^x, y_{rk}^y) تعیین کرد. اگر داده‌های منفی وجود داشته باشد، می‌توان آن را به صورت $(x_{ik} - \min_j \{x_{ij}\}, \max_j \{y_{rj}\} - y_{rk})$ از قبل تعیین کرد. از لین (۲۰۲۰) می‌دانیم که مدل (۲)، نتیجه تبدیل برنامه کسری زیر با استفاده از تبدیل Cooper و Charnes است (چارنس و همکاران، ۱۹۷۸):

$$\begin{aligned} \min & \frac{\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rk} + \xi}{\sum_{i=1}^I v_i g_{ik}^x + \sum_{r=1}^O u_r g_{rk}^y} \\ \text{s.t.} & \frac{\sum_{i=1}^I v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rj} + \xi}{\sum_{i=1}^I v_i g_{ij}^x + \sum_{r=1}^O u_r g_{rj}^y} \geq 0, \\ & j = 1, \dots, n, \\ & v_i, u_r \geq \epsilon, \forall i, r, \xi \text{ is free}. \end{aligned} \quad (3)$$

صورت کسر تابع هدف مدل (۳)، ناکارایی DMU_k را نشان می‌دهد. اگر DMU_k کارا باشد، برابر با صفر است. در غیر این صورت، مثبت است. مخرج تابع هدف مدل (۳)، ترکیبی خطی از تمام متغیرهای جهت ورودی و خروجی DMU_k است. فرض کنید $\beta_k = \frac{\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rk} + \xi}{\sum_{i=1}^I v_i g_{ik}^x + \sum_{r=1}^O u_r g_{rk}^y}$ است. در نتیجه، اولین محدودیت مدل (۳) را می‌توان به

صورت $\beta_j \geq 0, j=1, \dots, n$ بیان کرد. با توجه به اینکه $\sum_{i=1}^I v_i g_{ij}^x + \sum_{r=1}^O u_r g_{rj}^y, \forall j$ مثبت است، اولین محدودیت مدل (۳)

در واقع برابر با $\sum_{i=1}^I v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rj} + \xi \geq 0, j=1, \dots, n$ است. مخرج کسر را به اولین محدودیت مدل (۳) اضافه

می‌کنیم تا هدف مدل (۳) را راحت‌تر درک کنیم. به این معنا که در صورت حفظ اندازه‌های ناکارایی تمام DMUهایی که کمتر از صفر نیستند، اندازه ناکارایی DMU_k ارزیابی‌شده، با انتخاب v_i, u_r و ξ به حداقل می‌رسد. این هدف تا حدودی شبیه به مدل سنتی BCC است (بنکر و همکاران، ۱۹۸۴) که اندازه کارایی DMU_k ارزیابی‌شده در آن، با انتخاب متغیرها و حفظ حالتی که اندازه کارایی تمام DMUها بیشتر از یک نشود، به حداکثر برسد. لین (۲۰۲۰) نیز هدف مشابهی را برای ساخت یک مدل RDM مضربی با برنامه‌ریزی خطی کسری به کار برد.

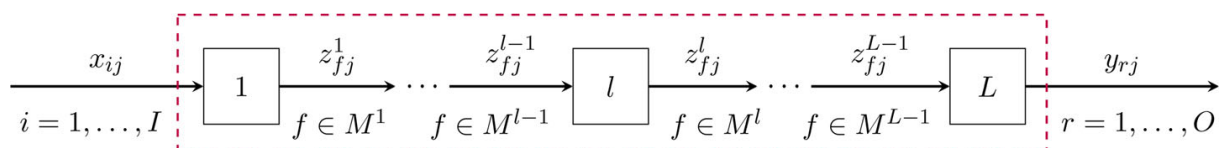
اگر متغیرهای جواب بهینه مسئله (۳) را با $\hat{v}_{ik}^*, \hat{u}_{rk}^*, \forall i, r$ و $\hat{\xi}_k^*$ نشان دهیم، در نتیجه داریم:

$$\beta_k^* = \frac{\sum_{i=1}^I \hat{v}_{ik}^* x_{ik} - \sum_{r=1}^O \hat{u}_{rk}^* y_{rk} + \hat{\xi}_k^*}{\sum_{i=1}^I \hat{v}_{ik}^* g_{ik}^x + \sum_{r=1}^O \hat{u}_{rk}^* g_{rk}^y}, \forall k. \quad (4)$$

اگر فرض CRS به کار رود، متغیر ξ در مدل‌های (۲) و (۳) و همچنین متغیر ξ_k^* در تساوی (۴)، باید حذف شوند.

۳- مدل DDF شبکه‌ای برای سیستم متوالی

ساختار متوالی پایه‌ای را با L فرایند در کائو (۲۰۱۴a) دنبال می‌کنیم که در شکل ۱ نشان داده شده است. در فرایند ۱، هر $DMU_j, j=1, \dots, n$ را $x_{ij} (i=1, \dots, I)$ مصرف می‌کند که از خارج و برای تولید محصولات بینابینی l مورد استفاده برای فرایند ۲، تامین شده‌اند. در فرایندهای بعدی $l (l=2, \dots, L-1)$ ، هر DMU_j محصولات بینابینی $z_{fj}^{l-1} (f \in M^{l-1})$ را از فرایند پیشروی $l-1$ مصرف می‌کند تا محصولات بینابینی $z_{fj}^1 (f \in M^1)$ را برای مصرف فرایند بعدی $l+1$ تولید کند. در فرایند L ، هر DMU_j محصولات بینابینی $z_{fj}^{L-1} (f \in M^{L-1})$ را برای تولید خروجی $y_{rj} (r=1, \dots, O)$ مصرف می‌کند. در اینجا اجازه می‌دهیم که محصولات بینابینی تولیدشده توسط فرایندهای مختلف، متفاوت باشند. به مجموعه محصولات بینابینی تولیدشده توسط فرایند $l (l=1, \dots, L-1)$ به مجموعه M^l اشاره دارد. محصولات بینابینی تولیدشده توسط هر فرایند $M^l (l=1, \dots, L-1)$ به مجموعه M^l تعلق دارد.



شکل ۱. ساختار متوالی

چن و همکاران (۲۰۰۹)، یک مدل DEA دو مرحله‌ای را با استفاده از یک تجزیه کارایی جمعی پیشنهاد کردند. در مقایسه با تجزیه کارایی ضربی پیشنهادی توسط کائو و هوانگ (۲۰۰۸) که فقط می‌تواند تحت فرض CRS اعمال شود، اندازه‌گیری و تجزیه کارایی چن و همکاران (۲۰۰۹) می‌تواند تحت هر دو فرض CRS و VRS اعمال شود، با توجه به این امر، مدل متوالی زیر را براساس مدل DDF (۳) و مدل چن و همکاران (۲۰۰۹) ایجاد کردیم:

$$\beta_k^S = \min \frac{\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rk} + \sum_{l=1}^L \xi^l}{\sum_{i=1}^I v_i g_{ik}^x + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f g_{fk}^{z,l} + \sum_{r=1}^O u_r g_{rk}^y}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\sum_{i=1}^I v_i x_{ij} - \sum_{f \in M^1} w_f z_{fj}^1 + \xi^1}{\sum_{i=1}^I v_i g_{ij}^x + \sum_{f \in M^1} w_f g_{fj}^{z,1}} \geq 0, j=1, \dots, n,$$

$$\frac{\sum_{f \in M^{l-1}} w_f z_{fj}^{l-1} - \sum_{f \in M^l} w_f z_{fj}^l + \xi^l}{\sum_{f \in M^{l-1}} w_f g_{fj}^{z,l-1} + \sum_{f \in M^l} w_f g_{fj}^{z,l}} \geq 0,$$

$$j=1, \dots, n, l=2, \dots, L-1,$$

$$\frac{\sum_{f \in M^{L-1}} w_f z_{fj}^{L-1} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rj} + \xi^L}{\sum_{f \in M^{L-1}} w_f g_{fj}^{z,L-1} + \sum_{r=1}^O u_r g_{rj}^y} \geq 0, j=1, \dots, n,$$

$$v_i, u_r, w_f \geq \epsilon, \forall i, r, f, \xi^l \text{ is free}, \forall l, \quad (5)$$

که در آن $g_{ij}^x, g_{ij}^{z,l}, \forall l$ و g_{rj}^y به ترتیب متغیرهای جهت $x_{ij}, z_{fj}^l, \forall l$ و y_{rj} هستند و باید غیرمنفی باشند. $(g_{ij}^{z,l-1}, g_{rj}^y)$ و $(g_{ij}^x, g_{fj}^{z,l}), (g_{fj}^{z,l-1}, g_{fj}^{z,l}) (l=2, \dots, L-1)$ به ترتیب بردارهای جهت DMU_j از فرایند ۱ به فرایند L هستند که تمام آن‌ها، نباید بردارهای صفر باشند. توجه کنید که متغیر جهت محصول بینابینی z_{fj}^1 برای دو فرایند مجاور l و $l+1 (l=1, \dots, L-1)$ یکسان و برابر با $g_{fj}^{z,l}$ است که به عنوان خروجی فرایند l یا ورودی فرایند $l+1$ مشاهده می‌شود. مدل (۵) تحت VRS ساخته شده است. ξ^l متغیر مرتبط با فرض VRS برای هر فرایند l است. اگر همه متغیرهای آزاد در علامت (۵) $\xi^l (l=1, \dots, L)$ در مدل (۵) حذف شوند، فرم CRS آن به دست می‌آید.

مخرج کسر تابع هدف مدل (۵)، ترکیبی خطی از متغیرهای جهت ورودی و خروجی DMU_k در تمام فرایندهای L است. این ویژگی تا حدی شبیه مدل DDF (۳) است. توجه کنید که مجموعه محدودیت سیستم

$$\frac{\sum_{i=1}^I v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rj} + \sum_{l=1}^L \xi^l}{\sum_{i=1}^I v_i g_{ij}^x + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f g_{fj}^{z,l} + \sum_{r=1}^O u_r g_{rj}^y} \geq 0, j=1, \dots, n, \quad (6)$$

را به مدل (۵) اضافه نمی‌کنیم. زیر در برنامه‌ریزی خطی (LP) معادل به دست آمده در تبدیل چارنز-کوپر، مجموعه محدودیت LP مربوط به (۶)، زائد است و می‌توان آن را حذف کرد. بدیهی است که هدف مدل (۵) این است که در زمانی که اندازه‌های ناکارایی تمام DMU ها در هر فرایند را به گونه‌ای در نظر می‌گیرد که کمتر از صفر نباشند، اندازه ناکارایی سیستم DMU_k ارزیابی شده را به حداقل برساند.

β_k^S ، مشابه با β_k^* مدل (۲)، ناکارایی سیستم متوالی را اندازه‌گیری می‌کند. اگر $\beta_k^S = 0$ باشد، سیستم برای DMU_k ، کارا است. در غیر این صورت، برای DMU_k ، ناکارا است. مدل (۵) یک LP کسری است. با استفاده از تبدیل چارنز-کوپر می‌توان آن را به شکل زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned}
 \beta_k^S = \min & \sum_{i=1}^I v_i x_{ik} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rk} + \sum_{l=1}^L \zeta^l \\
 \text{s.t.} & \sum_{i=1}^I v_i g_{ik}^x + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f g_{fk}^{z,l} + \sum_{r=1}^O u_r g_{rk}^y = 1, \\
 & \sum_{i=1}^I v_i x_{ij} - \sum_{f \in M^1} w_f z_{fj}^1 + \zeta^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{f \in M^{l-1}} w_f z_{fj}^{l-1} - \sum_{f \in M^l} w_f z_{fj}^l + \zeta^l \geq 0, \\
 & \quad j = 1, \dots, n, l = 2, \dots, L-1, \\
 & \sum_{f \in M^{L-1}} w_f z_{fj}^{L-1} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rj} + \zeta^L \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & v_i, u_r, w_f \geq \epsilon, \forall i, r, f, \zeta^l \text{ is free}, \forall l,
 \end{aligned} \tag{7}$$

که به راحتی حل می‌شود. توجه کنید که وقتی مخرج یک کسر، از قبل مثبت بوده باشد، بزرگ‌تر یا مساوی با صفر بودن آن کسر، به بزرگ‌تر یا مساوی با صفر بودن مخرج، بستگی دارد. از آنجایی که $\sum_{i=1}^I v_i g_{ij}^x + \sum_{f \in M^1} w_f g_{fj}^{z,1}$ مثبت هستند، سه محدودیت اول مدل (۵)، مساوی با محدودیت‌های دوم تا چهارم مدل (۷) است. فرض کنید $G = \bigcup_{l=1}^{L-1} M^l$ است. به ازای هر l, j ممکن، z_{fj}^l و $g_{fj}^{z,l}$ را به ازای $f \in G \setminus M^l$ برابر با صفر قرار می‌دهیم. بنابراین می‌توانیم مسئله دوگان مدل (۷) را به صورت زیر به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned}
 \beta_k^S = \max & b + \epsilon \left(\sum_{i=1}^I s_i^x + \sum_{r=1}^O s_r^y + \sum_{f \in G} s_f^z \right) \\
 \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n \lambda_j^1 x_{ij} + s_i^x + b g_{ik}^x = x_{ik}, \quad i = 1, \dots, I, \\
 & - \sum_{j=1}^n \lambda_j^L y_{rj} + s_r^y + b g_{rk}^y = -y_{rk}, \quad r = 1, \dots, O, \\
 & \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{j=1}^n (\lambda_j^{l+1} z_{fj}^l - \lambda_j^l z_{fj}^l) + 2b \sum_{l=1}^{L-1} g_{fj}^{z,l} + s_f^z = 0, \quad f \in G, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j^l = 1, \quad l = 1, \dots, L, \\
 & \lambda_j^l, s_i^x, s_r^y, s_f^z \geq 0, \forall i, r, f, j, l.
 \end{aligned} \tag{8}$$

در مدل (۸)، مجموعه‌های تساوی اول و دوم به ترتیب برابر با مجموعه‌های محدودیت ورودی‌ها و خروجی‌ها هستند. محدودیت VRS فرایند l است. از آنجایی که نیاز داریم عامل یکسان در فرایندهای مختلف، ضرب یکسانی داشته باشد، z_{fj}^{l-1} و z_{fj}^l دارای مضرب یکسان w_f هستند. در نتیجه، مجموعه محدودیت محصولات بینابینی در مسئله دوگان مدل (۷)، در مجموعه تساوی سوم مدل (۸) نشان داده شده است که برابر با مجموع محدودیت‌های محصول بینابینی زیر در L فرایند است.

$$- \sum_{j=1}^n \lambda_j^{l+1} z_{fj}^l \geq -z_{fd}^l + g_{fd}^{z,l} b, \quad f \in G, l = 1, \dots, L-1, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^l z_{fj}^l \geq z_{fd}^l + g_{fd}^{z,l} b, \quad f \in G, l=1, \dots, L-1. \quad (10)$$

واضح است که (۹) برابر است با

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{l+1} z_{fj}^l \leq z_{fd}^l - g_{fd}^{z,l} b, \quad f \in G, l=1, \dots, L-1 \quad (11)$$

توجه کنید که z_{fj}^l به عنوان یک خروجی از فرایند l ($l=1, \dots, L-1$) در (۱۰) در نظر گرفته می‌شود و هر چه مقدار آن بیشتر باشد، بهتر است. در عین حال، به عنوان یک ورودی فرایند $l+1$ ($l=1, \dots, L-1$) در (۱۱) در نظر گرفته می‌شود و هر چه مقدار آن کمتر باشد، بهتر است.

تعداد اندکی مدل DDF شبکه‌ای وجود دارند که سیستم تولید داخلی DMUها را در نظر می‌گیرند و می‌توانند داده‌های منفی را مدیریت کنند. تا جایی که می‌دانیم فقط مدل‌های DDF دو مرحله‌ای پیشنهادی ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶) و توانا و همکاران (۲۰۱۸) می‌توانند با داده‌های منفی سر و کار داشته باشند. سایر مدل‌های DDF شبکه‌ای یا نمی‌توانند داده‌های منفی را مدیریت کنند یا مدل‌های پویا هستند که فرایند تولید داخلی DMUها را در نظر نمی‌گیرند. هر دو مدل DDF دو مرحله‌ای فوق، تحت فرم پوششی هستند و محدودیت‌هایی مشابه با (۱۰) و (۱۱) و/یا محدودیت پیوند بین دو فرایند یا دوره مجاور مانند $\sum_{j=1}^n \lambda_j^l z_{fj}^l = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{l+1} z_{fj}^l, \forall f, l$ را برای محصولات بینابینی به کار می‌رود. واضح است که محدودیت‌های محصول بینابینی در مدل (۸)، ساده‌تر هستند، در نتیجه، امتیاز کارایی سیستم تولیدشده توسط مدل (۷) یا (۸)، نسبتاً بالاتر و بنابراین تفکیک‌پذیرتر است.

فرض کنید u_r^*, v_i^*, w_f^* و ξ^{l*} متغیرهای جواب بهینه مدل (۷) باشند. امتیازهای کارایی DDF سیستم و فرایند را می‌توان با روابط زیر محاسبه کرد:

$$\beta_k^S = \frac{\sum_{i=1}^I v_i^* x_{ik} - \sum_{r=1}^O u_r^* y_{rk} + \sum_{l=1}^L \xi^{l*}}{\sum_{i=1}^I v_i^* g_{ik}^x + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f^* g_{fk}^{z,l} + \sum_{r=1}^O u_r^* g_{rk}^y} \quad (12)$$

$$\beta_k^{S,1} = \frac{\sum_{i=1}^I v_i^* x_{ik} - \sum_{f \in M^1} w_f^* z_{fk}^1 + \xi^{1*}}{\sum_{i=1}^I v_i^* g_{ik}^x + \sum_{f \in M^1} w_f^* g_{fk}^{z,1}}, \quad (13)$$

$$\beta_k^{S,l} = \frac{\sum_{f \in M^{l-1}} w_f^* z_{fk}^{l-1} - \sum_{f \in M^l} w_f^* z_{fk}^l + \xi^{l*}}{\sum_{f \in M^{l-1}} w_f^* g_{fk}^{z,l-1} + \sum_{f \in M^l} w_f^* g_{fk}^{z,l}}, \quad l=2, \dots, L-1,$$

$$\beta_k^{S,L} = \frac{\sum_{f \in M^{L-1}} w_f^* z_{fk}^{L-1} - \sum_{r=1}^O u_r^* y_{rk} + \xi^{L*}}{\sum_{f \in M^{L-1}} w_f^* g_{fk}^{z,L-1} + \sum_{r=1}^O u_r^* g_{rk}^y}.$$

اگر فرض کنیم که

$$\begin{aligned}\tau^1 &= \frac{\sum_{i=1}^I v_i^* g_{ik}^x + \sum_{f \in M^1} w_f^* g_{fk}^{z,1}}{\sum_{i=1}^I v_i^* g_{ik}^x + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f^* g_{fk}^{z,l} + \sum_{r=1}^O u_r^* g_{rk}^y}, \\ \tau^l &= \frac{\sum_{f \in M^{l-1}} w_f^* g_{fk}^{z,l-1} + \sum_{f \in M^l} w_f^* g_{fk}^{z,l}}{\sum_{i=1}^I v_i^* g_{ik}^x + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f^* g_{fk}^{z,l} + \sum_{r=1}^O u_r^* g_{rk}^y}, l=2, \dots, L-1, \\ \tau^L &= \frac{\sum_{f \in M^{L-1}} w_f^* g_{fk}^{z,L-1} + \sum_{r=1}^O u_r^* g_{rk}^y}{\sum_{i=1}^I v_i^* g_{ik}^x + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f^* g_{fk}^{z,l} + \sum_{r=1}^O u_r^* g_{rk}^y},\end{aligned}\quad (14)$$

آنگاه به دست آوردن (۱۵)، ساده است:

$$\sum_{l=1}^L \tau^l \beta_k^{s,l} = \beta_k^s \quad (15)$$

و $\sum_{l=1}^L \tau^l = 1$ است. بنابراین β_k^s ، میانگین وزنی $\beta_k^{s,l}$ است. اگر فرض CRS پذیرفته شود، آنگاه تمام τ^l ها در مدل‌های (۵) و (۷) و همچنین تمام τ^{l*} ها در (۱۲) و (۱۳) باید حذف شوند. به علاوه (۱۵) همچنان فرم CRS مدل پیشنهادی را ایجاد می‌کند.

هنگامی که بردارهای جهت، متفاوت هستند، جواب‌های بهینه مدل (۷) نیز به دلیل پارامترهای مختلف محدودیت معادله، متفاوت خواهند بود. در نتیجه، امتیازهای کارایی و وزن‌های τ^l ، متفاوت خواهند بود. بنابراین، اگر بردارهای جهت قبل از استفاده از مدل (۷)، از قبل تعیین نشده باشند، نتایج اندازه‌گیری کارایی، حساس و غیرموجه هستند. این مشکل در استفاده از مدل DDF متوالی، مطلوب نیست و برای جلوگیری از آن، بردار جهت را قبل از حل مدل (۷) با توجه به معیار زیر تعیین می‌کنیم.

به ازای مجموعه داده‌های غیرمنفی که در آن $(z_{ff}^{l-1}, z_{ff}^l), (x_{ij}, z_{ff}^l), \forall l$ و (z_{ff}^{L-1}, y_{rj}) بردارهای غیرصفر هستند، رابطه زیر را

$$(g_{ij}^x, g_{ff}^{z,l}, g_{rj}^y) = (x_{ij}, z_{ff}^l, y_{rj}) \quad (16)$$

به عنوان بردار جهت مدل (۷) قرار می‌دهیم.

برای سایر مجموعه داده‌ها، به ویژه مجموعه داده‌هایی با مقادیر منفی، رابطه (۱۷) را به عنوان بردار جهت مدل (۷) قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}(g_{ij}^x, g_{ff}^{z,l}, g_{rj}^y) &= \left(x_{ij} - \min_j \{x_{ij}\}, \frac{1}{2} \left(\max_j \{z_{ff}^l\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \min_j \{z_{ff}^l\} \right), \max \{y_{rj}\} - y_{rj} \right)\end{aligned}\quad (17)$$

در کاربرد عملی، بردار جهت $(g_{ij}^x, g_{ff}^{z,l}, g_{rj}^y)$ را با توجه به معیار فوق تعیین می‌کنیم تا از مشکل حساسیت ناشی از بردارهای جهت مختلف، جلوگیری کنیم.

اگر چه در صورتی که (۱۷) به عنوان بردار جهت، تعیین شود، مدل (۷) همچنان برای مجموعه داده‌های غیرمنفی، شدنی است. با این حال، جهت (۱۶) برای مجموعه داده‌های غیرمنفی، متداول‌تر است. به عنوان مثال، وانکه و همکاران (۲۰۱۸)، جهت را در مدل DDF دو مرحله‌ای خودبه صورت $(x_{ij}, z_{ff}^l, y_{rj})$ تعیین کردند. مهم‌تر از همه، کائو (۲۰۲۰) اشاره کرد که در زمانی که تمام داده‌ها، مثبت هستند، کارایی DDF تعریف شده با استفاده از جهت (۱۷)، به تعریف متداول کارایی، ختم نمی‌شود. بنابراین، برای متداول‌تر کردن مدل DDF، (۱۶) را به عنوان بردار جهت مجموعه داده‌های غیرمنفی قرار دادیم.

هر متغیر جهت در (۱۷)، معنای خاص خود را دارد. متغیرهای جهت ورودی‌ها و خروجی‌ها در (۱۷)، محدوده‌های مربوط به بهبود احتمالی هستند (پورتلا و همکاران، ۲۰۰۴). میانگین $\max_j \{z_{ff}^l\} - z_{ff}^l$ و $\min_j \{z_{ff}^l\}$ را به‌عنوان متغیر جهت هر محصول بینابینی، انتخاب می‌کنیم. این دو متغیر جهت‌دار در زمانی که محصولات بینابینی به ترتیب به عنوان خروجی و ورودی در نظر گرفته می‌شوند، محدوده بهبود احتمالی را نشان می‌دهند. در کاربردهای عملی، (۱۷) می‌تواند تضمین کند که $(g_{ff}^{z,l-1}, g_{ff}^{z,l-1}), (g_{ff}^x, g_{ff}^{z,l-1})$ در اکثر موارد، برابر با بردارهای صفر نیستند. توجه کنید که بردار جهت $g_{ff}^{z,l}$ در اینجا، با استفاده از فرمول $\frac{1}{2}(\max_j \{z_{ff}^l\} - \min_j \{z_{ff}^l\})$ به‌دست می‌آید. این بدان معنا نیست که انتظار می‌رود محصولات بینابینی، افزایش یابد. همان‌طور که شرح دادیم، محدودیت‌های (۹) و (۱۰)، محصولات بینابینی z_{ff}^l را به ترتیب به عنوان ورودی‌های فرایند $l+1$ و همچنین خروجی‌های مطلوب فرایند l در نظر می‌گیرند و مجموعه محدودیت‌های محصولات بینابینی در مدل (۸) (یعنی، دوگان مدل (۷))، برابر با جمع محدودیت‌های (۹) و (۱۰) است. در (۹)، کمتر بودن محصولات بینابینی، بهتر است. با این حال، در (۱۰)، بیشتر بودن محصولات بینابینی، بهتر است. یعنی مدل (۷)، کارایی را فقط با افزایش محصولات بینابینی، اندازه‌گیری نمی‌کند.

جواب بهینه (v_i^*, u_r^*, w_f^*) مدل (۷)، مانند مدل‌های DEA مضربی شبکه‌ای فعلی، به‌عنوان مثال، مدل دو مرحله‌ای پیشنهادی چن و همکاران (۲۰۰۹)، ممکن است منحصر به فرد نباشد. بنابراین فرایند مشابه l از DMU_k ممکن است یک امتیاز کارایی متفاوت $\beta_k^{s,l}$ را داشته باشد. این ضعف موجب می‌شود که کارایی فرایند DMU های مختلف، قابل مقایسه نباشد. برای برطرف ساختن آن به روش کائو و هوانگ (۲۰۰۸) اشاره می‌کنیم. با فرض حفظ امتیاز کارایی DDF سیستم به عنوان β_k^s ، متغیرهای جواب بهینه‌ای را جستجو می‌کنیم که کوچک‌ترین $\beta_k^{s,l}$ را برای فرایند l با ترتیبی که از قبل توسط تصمیم‌گیرندگان تعیین شده، تولید می‌کنند. به عنوان مثال، اگر ترتیب، از فرایند ۱ به فرایند L باشد، ابتدا امتیاز کارایی DDF فرایند ۱ را به حداقل می‌رسانیم، در عین حال، امتیاز کارایی DDF سیستم را برابر با β_k^s نگه می‌داریم. در نتیجه، داریم:

$$\begin{aligned} \beta_k^{s,1*} &= \min \frac{\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} - \sum_{f \in M^1} w_f z_{fk}^1 + \zeta^1}{\sum_{i=1}^I v_i g_{ik}^x + \sum_{f \in M^1} w_f g_{fk}^{z,1}} \\ \text{s.t. } &\frac{\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rk} + \sum_{l=1}^L \zeta^l}{\sum_{i=1}^I v_i g_{ik}^x + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f g_{fk}^{z,l} + \sum_{r=1}^O u_r g_{rk}^y} = \beta_k^s \\ &\frac{\sum_{i=1}^I v_i x_{ij} - \sum_{f \in M^1} w_f z_{ff}^1 + \zeta^1}{\sum_{i=1}^I v_i g_{ij}^x + \sum_{f \in M^1} w_f g_{ff}^{z,1}} \geq 0, j = 1, \dots, n, \\ &\frac{\sum_{f \in M^{l-1}} w_f z_{ff}^{l-1} - \sum_{f \in M^l} w_f z_{ff}^l + \zeta^l}{\sum_{f \in M^{l-1}} w_f g_{ff}^{z,l-1} + \sum_{f \in M^l} w_f g_{ff}^{z,l}} \geq 0, \\ &\quad j = 1, \dots, n, l = 2, \dots, L-1, \\ &\frac{\sum_{f \in M^{L-1}} w_f z_{ff}^{L-1} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rj} + \zeta^L}{\sum_{f \in M^{L-1}} w_f g_{ff}^{z,L-1} + \sum_{r=1}^O u_r g_{rj}^y} \geq 0, \\ &\quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (18)$$

مدل (۱۸) را می‌توان به یک LP معادل تبدیل کرد که حل آن، ساده است. مقدار $\beta_k^{s,1*}$ به عنوان مقدار بهینه مدل (۱۸)، منحصر به فرد است. سپس، امتیازهای کارایی DDF فرایندهای باقی‌مانده از فرایند ۲ تا فرایند L را به حداقل می‌رسانیم در عین حال، امتیاز کارایی DDF سیستم را برابر با β_k^s و امتیاز کارایی DDF فرایند ۱ را برابر با $\beta_k^{s,1*}$ نگه می‌داریم. تا زمانی که

تمام امتیازهای کارایی فرایند، به طور منحصر به فرد تعیین شوند، این روش را استفاده می‌کنیم. در عمل، تصمیم‌گیرندگان باید ترتیب محاسبه کارایی‌های فرایند را با توجه به شرایط واقعی، از قبل تعیین کنند. بدیهی است که اگر فرض CRS به کار رود، تمام متغیرهای آزاد در علامت l باید از مدل (۱۸) حذف شوند.

۴- ارتباط با مدل CCR متوالی

تمام مدل‌های این بخش در یک مجموعه داده غیرمنفی خاص، برای ارائه مورد بحث قرار می‌گیرند که در شرایط زیر صدق می‌کنند: حداقل یک مقدار مثبت برای هر یک از ورودی‌ها، خروجی‌ها و محصولات بینابینی وجود دارد. $(x_{ij}^1, z_{ff}^1), (z_{ff}^{l-1}, z_{ff}^l), \forall l$ باید بردارهای غیرصفر باشند. جهت مدل DDF شبکه‌ای (۵) با توجه به معیار تعیین جهت ارائه‌شده در بخش ۳، به صورت (۲۱) تعیین می‌شود. تمام مدل‌های این بخش، تحت فرض CRS مورد بحث قرار می‌گیرند. مدل CCR متوالی مربوط به شکل ۱ را با پیروی از چن و همکاران (۲۰۰۹) می‌توان به صورت زیر فرموله کرد:

$$\begin{aligned} E_k^S = \max \quad & \left(\sum_{r=1}^O u_r y_{rk} + \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f z_{fk}^l \right) / \left(\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} + \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f z_{fk}^l \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{f \in M^1} w_f z_{ff}^1 / \sum_{i=1}^I v_i x_{ij} \leq 1, j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{f \in M^l} w_f z_{ff}^l / \sum_{f \in M^{l-1}} w_f z_{ff}^{l-1} \leq 1, j = 1, \dots, n, l = 2, \dots, L-1, \\ & \sum_{r=1}^O u_r y_{rj} / \sum_{f \in M^{L-1}} w_f z_{ff}^{L-1} \leq 1, j = 1, \dots, n, \\ & v_i, u_r, w_f \geq \epsilon, \forall i, r, f. \end{aligned} \quad (19)$$

بنابراین، امتیازهای کارایی فرایند تولید شده توسط (۱۹) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} E_k^{S,1} &= \sum_{f \in M^1} \tilde{w}_f^* z_{ff}^1 / \sum_{i=1}^I \tilde{v}_i^* x_{ij}, \\ E_k^{S,l} &= \sum_{f \in M^l} \tilde{w}_f^* z_{ff}^l / \sum_{f \in M^{l-1}} \tilde{w}_f^* z_{ff}^{l-1}, \quad l = 2, \dots, L-1, \\ E_k^{S,L} &= \sum_{r=1}^O \tilde{u}_r^* y_{rj} / \sum_{f \in M^{L-1}} \tilde{w}_f^* z_{ff}^{L-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

در واقع، داریم

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f z_{fk}^l + \sum_{r=1}^O u_r y_{rk}} \\ &= \frac{2 \sum_{i=1}^I v_i x_{ik} + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f z_{fk}^l}{\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f z_{fk}^l + \sum_{r=1}^O u_r y_{rk}} \\ &= \frac{2}{1 + \frac{\sum_{r=1}^O u_r y_{rk} + \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f z_{fk}^l}{\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} + \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f z_{fk}^l}}. \end{aligned} \quad (21)$$

بنابراین به حداقل رساندن $\sum_{i=1}^I v_i x_{ik} - \sum_{r=1}^O u_r y_{rk} / \sum_{i=1}^I v_i x_{ik} + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f z_{fk}^l + \sum_{r=1}^O u_r y_{rk}$ ، در واقع معادل با به حداکثر

رساندن $\sum_{r=1}^O u_r y_{rk} + \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f z_{fk}^l / \sum_{i=1}^I v_i x_{ik} + \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{f \in M^l} w_f z_{fk}^l$ است. بدیهی است که ناحیه شدنی مدل (۱۹)، با ناحیه

شدنی شکل CRS از مدل (۵) در مجموعه داده‌های غیرمنفی خاص، برابر است. بنابراین، جواب‌های بهینه مدل (۵)، برابر با جواب‌های بهینه مدل (۱۹) هستند. سپس از (۲۱) داریم $1 + \beta_k^s = \frac{2}{1 + E_k^s}, \forall k$ ، یعنی $E_k^s = \frac{1 - \beta_k^s}{1 + \beta_k^s}, \forall k$ است. به علاوه، در مجموعه داده‌های غیرمنفی خاص، امتیازهای کارایی فرایند DDF تعیین‌شده توسط فرم CRS مدل (۵) به صورت زیر بیان می‌شود:

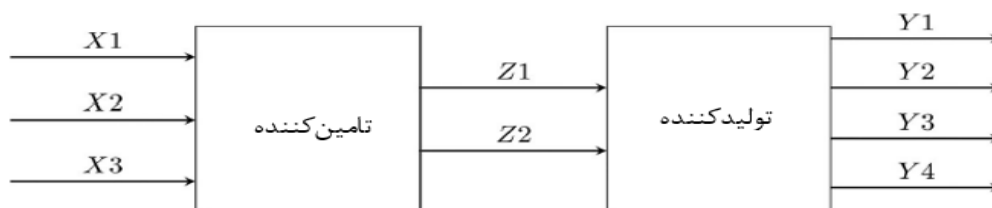
$$\begin{aligned} \beta_k^{S,1} &= \frac{\sum_{i=1}^I v_i^* x_{ik} - \sum_{f \in M^1} w_f^* z_{fk}^1}{\sum_{i=1}^I v_i^* x_{ik} + \sum_{f \in M^1} w_f^* z_{fk}^1}, \\ \beta_k^{S,l} &= \frac{\sum_{f \in M^{l-1}} w_f^* z_{fk}^{l-1} - \sum_{f \in M^l} w_f^* z_{fk}^l}{\sum_{f \in M^{l-1}} w_f^* z_{fk}^{l-1} + \sum_{f \in M^l} w_f^* z_{fk}^l}, l = 2, \dots, L-1, \\ \beta_k^{S,L} &= \frac{\sum_{f \in M^{L-1}} w_f^* z_{fk}^{L-1} - \sum_{r=1}^O u_r^* y_{rk}}{\sum_{f \in M^{L-1}} w_f^* z_{fk}^{L-1} + \sum_{r=1}^O u_r^* y_{rk}}. \end{aligned} \quad (22)$$

با مقایسه (۲۲) و (۲۰) با یکدیگر، به راحتی می‌توانیم $E_k^{s,l} = \frac{1 - \beta_k^{s,l}}{1 + \beta_k^{s,l}}, \forall k, l$ را بدست آوریم.

۵- مثال تشریحی و مقایسه‌ها

با هدف نشان دادن اعتبار و مزایای مدل DDF متوالی، آن را در یک مثال از پژوهش‌های صورت‌گرفته، اعمال می‌کنیم.

مثال ۱. برای نشان دادن توانایی مدل متوالی در سر و کار داشتن با داده‌های منفی، مورد واقعی ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶) را در نظر می‌گیریم که دارای ۲۹ زنجیره تامین ایرانی است و فرایند تولید آن‌ها به دو مرحله تامین‌کننده و تولیدکننده تقسیم می‌شود. هر زنجیره تامین برای این سیستم تولید دو مرحله‌ای، از هزینه ایمنی کار و سلامت کار (X_1)، هزینه سالانه (X_2) و هزینه محیط زیستی (X_3) استفاده می‌کند تا نرخ افزایش هزینه مشارکت در برنامه‌های تولید سبز (Z_1) و تعداد محصولات از تامین‌کننده به تولیدکننده (Z_2) در مرحله اول را ایجاد کند و سپس با استفاده از Z_1 و Z_2 ، تعداد گواهینامه‌های ISO اخذ شده (Y_1)، تعداد پرسنل آموزش‌دیده در زمینه‌های شغلی، ایمنی و سلامت (Y_2)، نرخ افزایش تعداد محصولات سبز (Y_3) و نرخ افزایش درآمد (Y_4) در مرحله دوم را به‌دست می‌آورد. ساختار شبکه‌ای دقیق زنجیره‌های تامین و داده‌ها به ترتیب در شکل ۳ و جدول ۱ ارائه شده است. از جدول ۱ ملاحظه می‌کنیم که در Z_1 و Y_3 و Y_4 مقادیر منفی وجود دارد. بنابراین، جهت مدل (۷) به صورت (۲۲) تعیین می‌شود و فرض VRS به کار می‌رود. نتایج مدل (۷) در جدول ۲ نشان داده شده است.



شکل ۳. ساختار زنجیره‌های تامین

جدول ۱: داده‌های مثال ۲

DMU	X_1	X_2	X_3	Z_1	Z_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
۱	۱۱	۱۲۴۲	۸۶	-۲	۲	۱	۱۵	۱۲	۱۲
۲	۱۴	۲۱۴۵	۱۲۶	۸	۱۲	۴	۷۴	۱۶	۱۶

۱۵	۱۵	۴۵	۴	۱۰	۱۲	۱۱۵	۲۰۲۵	۹	۳
-۸	-۸	۳۴	۲	۵	-۵	۹۵	۱۶۸۰	۱۲	۴
۱۲	۱۲	۴۱	۳	۷	-۱	۱۱۰	۱۸۶۰	۱۶	۵
۱۱	۱۱	۱۲	۲	۳	۱	۸۵	۱۴۷۸	۱۳	۶
۱۱	۱۱	۱۶	۲	۲	-۴	۷۵	۱۳۴۵	۱۱	۷
۱۱	۱۱	۲۲	۳	۵	-۲	۹۳	۱۵۶۵	۱۰	۸
۱۲	۱۲	۳۵	۴	۷	۳	۱۲۱	۱۸۶۰	۸	۹
۱۱	۱۱	۶۸	۴	۱۲	۲	۱۳۴	۲۱۱۲	۹	۱۰
۱۱	۱۱	۲۳	۱	۴	۱	۱۱۴	۱۴۵۶	۱۵	۱۱
۱۱	۱۱	۳۵	۲	۶	۲	۹۸	۱۷۲۴	۱۴	۱۲
-۱۲	-۱۲	۱۶	۱	۳	-۵	۷۴	۱۳۸۶	۱۲	۱۳
۸	۸	۲۱	۲	۷	-۲	۸۳	۱۶۳۵	۱۲	۱۴
-۷	-۷	۳۱	۱	۲	-۴	۷۷	۱۴۹۴	۱۳	۱۵
۱۵	۱۵	۴۲	۳	۸	۷	۱۱۸	۱۸۹۷	۱۶	۱۶
۱۲	۱۲	۵۴	۳	۱۰	۱۱	۱۲۲	۱۹۸۲	۱۳	۱۷
-۱۰	-۱۰	۱۴	۲	۴	-۶	۷۹	۱۳۴۴	۱۱	۱۸
۸	۸	۳۲	۲	۵	۲	۱۲۶	۱۸۸۳	۱۰	۱۹
۹	۹	۶۸	۴	۱۱	۹	۱۲۵	۲۰۲۰	۹	۲۰
-۱۱	-۱۱	۳۵	۲	۳	-۸	۱۰۵	۱۶۶۵	۸	۲۱
۵	۵	۲۷	۲	۲	-۴	۸۴	۱۴۸۷	۱۲	۲۲
۴	۴	۱۸	۲	۵	-۱	۷۲	۱۵۶۸	۱۵	۲۳
۸	۸	۴۸	۴	۸	۶	۱۰۸	۱۹۲۵	۱۲	۲۴
۳	۳	۲۴	۳	۹	۲	۱۰۲	۱۷۸۲	۱۴	۲۵
۱۶	۱۶	۷۵	۴	۶	۱۰	۱۱۶	۲۱۱۰	۱۰	۲۶
-۱۲	-۱۲	۲۷	۱	۳	-۸	۸۶	۱۲۵۰	۱۲	۲۷
۲	۲	۸۲	۳	۱۱	۴	۱۲۵	۱۹۵۴	۱۴	۲۸
۵	۵	۳۳	۲	۵	۱	۸۹	۱۶۸۰	۱۲	۲۹

ستون‌های ۲ و ۳ جدول ۲، امتیازهای کارایی سیستم DDF و رتبه‌های مربوطه از زنجیره‌های تامین را ارائه می‌کنند. مدل پیشنهادی، ۶ DMU کارایی سیستم (۱، ۲، ۷، ۹، ۲۱ و ۲۸) را شناسایی می‌کند. امتیازهای کارایی DDF فرایند و وزن‌های مربوطه نیز در جدول ۲ گزارش شده است. ستون‌های ۴ و ۵، امتیازهای کارایی DDF فرایند را ارائه می‌دهند که در آن، ابتدا امتیاز کارایی فرایند ۱ تعیین می‌شود و وزن‌های مربوطه در ستون‌های ۶ و ۷ آورده شده است. ستون‌های ۸ و ۹، امتیازهای کارایی DDF فرایند را نشان می‌دهند که در آن، ابتدا امتیاز کارایی فرایند ۲ تعیین می‌شود و وزن‌های مربوطه در دو ستون آخر آورده شده است. تایید این امر دشوار نیست که امتیازهای کارایی DDF فرایند و وزن‌ها در ستون‌های ۴ تا ۷ یا ستون‌های ۸ تا ۱۱ می‌توانند به امتیاز کارایی DDF سیستم β_k^s اضافه شوند. پورتلا و همکاران (۲۰۰۴) نشان دادند که فرض VRS باید در حضور داده‌های منفی، در نظر گرفته شود. برای مقایسه، مدل دو مرحله‌ای VRS چن و همکاران (۲۰۰۹)، فرم VRS مدل دو مرحله‌ای DDF ارائه شده توسط وانکه و همکاران (۲۰۱۸) و مدل‌های DDF دو مرحله‌ای ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶) و توانا و همکاران (۲۰۱۸) را در این مجموعه داده، اعمال می‌کنیم. دو مدل اول، تحت فرم مضربی ساخته شده‌اند و نمی‌توانند با داده‌های منفی، سر و کار داشته باشند و دو مدل آخر، تحت فرم پوششی ساخته شده‌اند و می‌توانند با داده‌های منفی، سر و کار داشته باشند.

جدول ۲: نتایج برای ۲۹ زنجیره تامین

τ^2	τ^1	$\beta_k^{s,2*}$	$\beta_k^{s,1}$	τ^2	τ^1	$\beta_k^{s,2}$	$\beta_k^{s,1*}$	رتبه‌بندی	β_k^s	DMUها
0.0118	0.9882	0.0000	0.0000	0.6666	0.3334	0.0000	0.0000	1	0.0000	1
0.4976	0.5024	0.0000	0.0000	0.4976	0.5024	0.0000	0.0000	1	0.0000	2
0.1655	0.8345	0.3274	0.0000	0.1655	0.8345	0.3274	0.0000	13	0.0542	3
0.4898	0.5102	0.0069	0.2830	0.4923	0.5077	0.0093	0.2820	24	0.1478	4
0.4242	0.5758	0.0000	0.3285	0.4242	0.5758	0.0002	0.3284	28	0.1892	5
0.5940	0.4060	0.1277	0.0063	0.5938	0.4062	0.1280	0.0058	14	0.0784	6
0.0023	0.9977	0.0000	0.0000	0.4579	0.5421	0.0000	0.0000	1	0.0000	7
0.3231	0.6769	0.0000	0.0169	0.3231	0.6769	0.0000	0.0169	10	0.0114	8
0.2391	0.7609	0.0000	0.0000	0.4985	0.5015	0.0000	0.0000	1	0.0000	9
0.2326	0.7674	0.0000	0.1946	0.2325	0.7675	0.0004	0.1944	25	0.1493	10
0.5682	0.4318	0.1217	0.0474	0.5640	0.4360	0.1226	0.0469	17	0.0896	11
0.4952	0.5048	0.1384	0.1533	0.4952	0.5048	0.1384	0.1533	23	0.1459	12
0.5000	0.5000	0.1002	0.0000	0.0039	0.9961	0.1002	0.0000	8	0.0004	13
0.5155	0.4845	0.1283	0.0519	0.5172	0.4828	0.1404	0.0387	18	0.0913	14
0.5768	0.4232	0.0504	0.2016	0.5773	0.4227	0.0507	0.2014	21	0.1144	15
0.5000	0.5000	0.0669	0.3344	0.3693	0.6307	0.0675	0.1149	19	0.0974	16
0.4092	0.5908	0.4841	0.0000	0.4092	0.5908	0.4841	0.0000	29	0.1981	17
0.2811	0.7189	0.1053	0.0000	0.2811	0.7189	0.1053	0.0000	11	0.0296	18
0.3480	0.6520	0.0000	0.2760	0.3480	0.6520	0.0000	0.2760	27	0.1800	19
0.5000	0.5000	0.1903	0.1628	0.2509	0.7491	0.1908	0.0509	16	0.0860	20
0.0016	0.9984	0.0000	0.0000	0.4514	0.5486	0.0000	0.0000	1	0.0000	21
0.5778	0.4222	0.0000	0.2399	0.5778	0.4222	0.0000	0.2399	20	0.1013	22
0.0027	0.9973	0.1260	0.0000	0.0027	0.9973	0.1260	0.0000	7	0.0003	23
0.3307	0.6693	0.0000	0.1263	0.3306	0.6694	0.0000	0.1262	15	0.0845	24
0.4284	0.5716	0.3950	0.0040	0.4276	0.5724	0.3988	0.0016	26	0.1715	25
0.9793	0.0207	0.0000	0.0992	0.9793	0.0207	0.0000	0.0992	9	0.0021	26
0.4289	0.5711	0.0726	0.0000	0.4289	0.5711	0.0726	0.0000	12	0.0311	27
0.2912	0.7088	0.0000	0.0000	0.9870	0.0130	0.0000	0.0000	1	0.0000	28
0.4956	0.5044	0.1797	0.1100	0.4956	0.5044	0.1797	0.1100	22	0.1445	29

جدول ۳ نتایج VRS تعیین شده توسط مدل‌های چن و همکاران (۲۰۰۹) و وانکه و همکاران (۲۰۱۸) را نشان می‌دهد. بدیهی است که نتایج این دو مدل، به دلیل وجود داده‌های منفی، دارای مشکلاتی است. هر دو مدل، وزن‌های منفی و مدل چن و همکاران، کارایی‌های فرایند منفی را ایجاد می‌کنند. این مشکلات، در کاربردهای عملی، غیرقابل قبول هستند. مدل‌های دو مرحله‌ای DDF ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶) و توانا و همکاران (۲۰۱۸)، می‌توانند با داده‌های منفی، سر و کار داشته باشند. در این دو مدل که با مدل ما تفاوت دارند، نیاز است که وزن‌های کارایی تجمعی، از قبل تعیین شوند. ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶)، از روش بردار ویژه برای تعیین دو وزن ۰/۲۴۵ (فرایند ۱) و ۰/۷۵۵ (فرایند ۲) استفاده کردند. مدل‌های پیشنهادی ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶) و توانا و همکاران (۲۰۱۸) براساس این مقادیر وزن‌ها، می‌توانند امتیازهای کارایی زنجیره تامین را تولید کنند که در جدول ۴ آمده است.

جدول ۳: نتایج VRS چن و همکاران (۲۰۰۹) و وانکه و همکاران (۲۰۱۸)

Wanke et al. (2018)					Chen et al. (2009)					DMUها
وزن ۲	وزن ۱	فرایند ۲	فرایند ۱	سیستم	وزن ۲	وزن ۱	فرایند ۲	فرایند ۱	سیستم	
0.3316	0.6684	1.0000	1.0000	1.0000	-0.0372	1.0372	1.0000	1.0000	1.0000	1
0.8322	0.1678	1.0000	1.0000	1.0000	0.9614	0.0386	1.0000	1.0000	1.0000	2
0.9606	0.0394	1.0017	1.0000	1.0016	0.0669	0.9331	0.7269	1.0000	0.9817	3
0.1172	0.8828	1.0427	1.1088	1.1010	0.0463	0.9537	0.8507	0.8894	0.8876	4
0.3195	0.6805	1.1065	1.1162	1.1131	0.1701	0.8299	0.7140	0.8586	0.8340	5
0.1726	0.8274	1.2991	1.0108	1.0606	0.0459	0.9541	-0.3568	0.9887	0.9269	6
0.0947	0.9053	1.0000	1.0000	1.0000	-0.0824	1.0824	1.0000	1.0000	1.0000	7
0.1393	0.8607	1.0000	1.0047	1.0041	0.0361	0.9639	1.0000	0.9951	0.9953	8
0.3825	0.6175	1.0000	1.0000	1.0000	0.0672	0.9328	1.0000	1.0000	1.0000	9
0.9618	0.0382	1.0000	1.0766	1.0029	0.1243	0.8757	1.0000	0.9317	0.9402	10
0.2243	0.7757	1.2210	1.0193	1.0645	0.1662	0.8338	0.6158	0.9772	0.9172	11
0.2288	0.7712	1.2226	1.0745	1.1084	0.0829	0.9171	0.3885	0.9054	0.8625	12
0.0001	0.9999	5.6471	1.0000	1.0004	0.0000	1.0000	-0.8625	1.0000	1.0000	13
0.1392	0.8608	1.4151	1.0000	1.0578	0.0718	0.9282	0.0829	1.0000	0.9341	14
0.0003	0.9997	1.3929	1.0431	1.0432	0.0000	1.0000	-16.9635	0.9572	0.9572	15

0.5421	0.4579	1.0173	1.0590	1.0364	0.1932	0.8068	0.8966	0.9271	0.9212	16
0.3508	0.6492	1.2941	1.0000	1.1032	0.2652	0.7348	0.4015	1.0000	0.8413	17
0.0322	0.9678	1.2665	1.0000	1.0086	0.0170	0.9830	0.5000	1.0000	0.9915	18
0.2231	0.7769	1.0000	1.1047	1.0813	0.0203	0.9797	1.0000	0.8948	0.8969	19
0.9613	0.0387	1.0010	1.0198	1.0017	0.1150	0.8850	0.8072	0.9800	0.9601	20
-0.0017	1.0017	1.0000	1.0000	1.0000	-0.0274	1.0274	1.0000	1.0000	1.0000	21
0.1734	0.8266	1.0000	1.0989	1.0817	0.0079	0.9921	1.0000	0.9087	0.9094	22
0.0004	0.9996	1.7713	1.0000	1.0003	0.0000	1.0000	0.1448	1.0000	1.0000	23
0.9745	0.0255	1.0002	1.0762	1.0021	0.1831	0.8169	1.0000	0.9254	0.9390	24
0.3451	0.6549	1.2472	1.0000	1.0853	0.2395	0.7605	0.4616	1.0000	0.8710	25
0.9719	0.0281	1.0000	1.0730	1.0021	0.1358	0.8642	1.0000	0.9443	0.9519	26
0.0124	0.9876	1.3314	1.0000	1.0041	0.0115	0.9885	0.6667	1.0000	0.9962	27
0.7650	0.2350	1.0000	1.0000	1.0000	0.4447	0.5553	1.0000	1.0000	1.0000	28
0.1617	0.8383	1.3502	1.0410	1.0910	0.0523	0.9477	0.4405	0.9219	0.8967	29

بدیهی است که وزن‌های تجمیعی برای تمام DMUها در این دو مدل، دقیقاً یکسان است. این ویژگی، کاملاً متفاوت از مدل پیشنهادی است که در آن، وزن‌هایی که توسط DMUهای مختلف استفاده می‌شوند تا به امتیازهای کارایی سیستم، اضافه شوند، متفاوت هستند.

از جدول ۴ ملاحظه می‌کنیم که مدل‌های DDF دو مرحله‌ای پیشنهادی ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶) و توانا و همکاران (۲۰۱۸) به ترتیب، ۷ و ۱۹ DMU کارای سیستم را شناسایی کرده‌اند. شش DMU که در مدل پیشنهادی، به عنوان DMUهای کارا شناسایی شدند، در این دو مدل نیز همچنان کارا هستند. چندین DMU کارای شناسایی‌شده توسط مدل‌های ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶) و توانا و همکاران (۲۰۱۸)، رتبه مناسبی در مدل پیشنهادی ندارند.

به عنوان مثال، DMU₁₀ که توسط این دو مدل به عنوان کارا شناخته شده است، در مدل پیشنهادی، در رتبه ۲۵ قرار دارد. هر چه توانایی تمایز عملکرد، قوی‌تر باشد، مدل پیشنهادی ممکن است به این واقعیت نسبت داده شود که دو مدل دیگر، محدودیت‌های مشابه با (۹) و (۱۰) را برای محصولات بینابینی به کار می‌برند و همچنین، مدل پیشنهادی توانا و همکاران (۲۰۱۸)، محدودیت‌های پیوند را برای محصولات بینابینی در نظر می‌گیرد، ولی مدل پیشنهادی، مضرب‌های یکسانی را برای محصولات بینابینی فرایندهای مختلف به کار می‌برد که محدودیت‌های مسئله دوگان آن را ساده‌تر می‌کند. در نتیجه، مدل پیشنهادی نسبت به دو مدل شبکه‌ای دیگر که می‌توانند با داده‌های منفی سر و کار داشته باشند، توانایی تمایز عملکرد قوی‌تری را دارد.

جدول ۴: نتایج ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶) و توانا و همکاران (۲۰۱۸)

DMUها	سیستم	رتبه‌بندی	فرایند ۱	فرایند ۲	سیستم	رتبه‌بندی	فرایند ۱	فرایند ۲
1	1.0000	1	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000
2	1.0000	1	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000
3	0.5141	24	1.0000	0.3564	1.0000	24	1.1591	0.3636
4	0.8574	11	1.0000	0.4180	1.0000	11	1.0000	1.0000
5	0.8003	17	1.0000	0.8150	1.0000	17	1.0000	1.0000
6	0.8169	15	1.0000	0.7574	1.0000	15	1.0000	1.0000
7	1.0000	1	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000
8	0.9885	8	0.9531	1.0000	1.0000	8	1.0000	1.0000
9	1.0000	1	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000
10	1.0000	1	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000
11	0.5853	22	0.4469	0.6302	1.0000	22	1.0000	1.0000
12	0.6026	21	0.4925	0.6384	1.0000	21	1.2025	0.8650
13	0.4228	26	1.0000	0.2355	1.0000	26	1.0000	1.0000
14	0.8167	16	1.0000	0.7572	1.0000	16	1.0000	1.0000
15	0.9110	9	0.6366	1.0000	1.0000	9	0.7468	1.0633
16	0.3927	27	0.1856	0.4599	1.0000	27	1.0690	0.8966
17	0.1464	29	1.0000	0.1305	1.0000	29	1.1887	0.2452
18	0.3387	28	1.0000	0.1241	1.0000	28	1.0000	1.0000
19	0.8361	14	0.3311	1.0000	1.0000	14	1.0000	1.0000
20	0.4704	25	1.0000	0.2986	1.0000	25	1.0702	0.6019
21	1.0000	1	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000
22	0.8949	10	0.5710	1.0000	1.0000	10	0.6785	1.0804
23	0.6524	20	1.0000	0.5396	1.0000	20	1.0000	1.0000
24	0.8458	13	0.3707	1.0000	1.0000	13	1.0000	1.0000

0.7582	1.2418	26	0.8767	0.3697	1.0000	23	0.5241	25
1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000	0.3857	12	0.8495	26
1.0000	1.0000	1	1.0000	0.6891	1.0000	18	0.7652	27
1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	28
0.8335	1.3884	23	0.9695	0.6584	0.6948	19	0.6673	29

جدول ۵: مقایسه کلی با سایر مدل‌ها

مدل	VRS	CRS	داده‌های منفی	تعداد DMUهای کارا
مدل ما	✓	✓	✓	۶
کائو و هوانگ (۲۰۰۸)		✓		
چن و همکاران (۲۰۰۹)	✓	✓		
وانکه و همکاران (۲۰۱۸)	✓	✓		
ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶)	✓	✓	✓	۷
توانا و همکاران (۲۰۱۸)	✓	✓	✓	۱۹

برای نشان دادن برتری کلی مدل پیشنهادی، موقعیت‌های کاربردی مدل‌های پیشنهادی کائو و هوانگ (۲۰۰۸)، چن و همکاران (۲۰۰۹)، وانکه و همکاران (۲۰۱۸)، ایزدی‌خواه و صائن (۲۰۱۶) و توانا و همکاران (۲۰۱۸) را فهرست می‌کنیم. تعداد DMUهای کارای شناسایی شده توسط مدل‌های ایزدی‌خواه و صائن (۱۳۹۵)، توانا و همکاران (۲۰۱۸) و مدل پیشنهادی، در مثال ۱ فهرست شده‌اند. براساس جدول ۵، می‌توانیم با اطمینان ادعا کنیم که نسبت به مدل‌های دو مرحله‌ای یا متوالی موجود، مدل ما همزمان سه مزیت زیر را دارد (۱) تحت هر دوی CRS و VRS معتبر است. (۲) می‌تواند با داده‌های منفی سر و کار داشته باشد. (۳) نسبت به مدل‌های شبکه‌ای مبتنی بر DDF فعلی که می‌توانند با داده‌های منفی سر و کار داشته باشند، توانایی تمایز عملکرد قوی‌تری را دارد.

۶- نتیجه‌گیری

این مقاله، یک مدل مضربی شبکه‌ای بدون ماهیت را برای سیستم متوالی ارائه می‌کند که ناکارایی در ورودی و خروجی را به طور هم‌زمان نشان می‌دهد. مسئله دوگان مدل DDF را بررسی کردیم و بر این اساس، یک مدل مضربی شبکه‌ای را برای سیستم متوالی ایجاد می‌کنیم. تجزیه کارایی مربوطه نیز ارائه شده است که امتیاز کارایی DDF سیستم در آن، به‌عنوان میانگین وزنی امتیازهای کارایی DDF فرایند بیان می‌شود. به طور خاص، تحت CRS دریافتیم که امتیازهای DDF سیستم و فرایند محاسبه‌شده توسط مدل DDF متوالی پیشنهادی، می‌تواند به طور معادل توسط مدل CCR متوالی محاسبه شود. همچنین مشکل کارایی فرایندهای جایگزین احتمالی را برطرف ساختیم. مدل پیشنهادی در مقایسه با مدل‌های شبکه‌ای مبتنی بر DDF فعلی برای سیستم‌های متوالی، نه تنها می‌تواند تحت هر دو فرض CRS و VRS اعمال شود و به خوبی با داده‌های منفی سر و کار داشته باشد، بلکه توانایی تمایز عملکرد قوی‌تری را نیز دارد.

منابع

- An, Q. X., Wen, Y., Chu, J. F., & Chen, X. H. (2019). Profit inefficiency decomposition in a serial-structure system with resource sharing. *Journal of the Operational Research Society*, *70*(12), 2112–2126. <https://doi.org/10.1080/01605682.2018.1510810>
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, *30*(9), 1078–1092. <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>
- Chambers, R. G., Chung, Y., & Färe, R. (1996). Benefit and distance functions. *Journal of Economic Theory*,

- 70(2), 407–419. <https://doi.org/10.1006/jeth.1996.0096>
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. L. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- Chen, Y., Cook, W. D., Kao, C., & Zhu, J. (2013). Network DEA pitfalls: Divisional efficiency and frontier projection under general network structures. *European Journal of Operational Research*, 226(3), 507–515. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.11.021>
- Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., & Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European Journal of Operational Research*, 196(3), 1170–1176. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.05.011>
- Cheng, G., Zervopoulos, P., & Qian, Z. (2013). A variant of radial measure capable of dealing with negative inputs and outputs in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 225(1), 100–105. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.09.031>
- Färe, R. (1991). Measuring Farrell efficiency for a firm with intermediate inputs. *Academia Economic Papers*, 19, 329–340.
- Färe, R., & Grosskopf, S. (1996). Productivity and intermediate products: A frontier approach. *Economics Letters*, 50(1), 65–70. [https://doi.org/10.1016/0165-1765\(95\)00729-6](https://doi.org/10.1016/0165-1765(95)00729-6)
- Färe, R., & Whittaker, G. (1995). An intermediate input model of dairy production using complex survey data. *Journal of Agricultural Economics*, 46(2), 201–213. <https://doi.org/10.1111/j.1477-9552.1995.tb00766.x>
- Izadikhah, M., & Saen, R. F. (2016). Evaluation sustainability of supply chains by two-stage range directional measure in the presence of negative data. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 49, 110–126. <https://doi.org/10.1016/j.trd.2016.09.003>
- Kao, C. (2014a). Efficiency decomposition for general multi-stage systems in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 232(1), 117–124. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.07.012>
- Kao, C. (2014b). Network data envelopment analysis: A review. *European Journal of Operational Research*, 239(1), 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.02.039>
- Kao, C. (2020). Measuring efficiency in a general production possibility set allowing for negative data. *European Journal of Operational Research*, 282(3), 980–988. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.10.027>
- Kao, C., & Hwang, S. N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research*, 185(1), 418–429. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.11.041>
- Kao, C., & Hwang, S. N. (2011). Decomposition of technical and scale efficiencies in two-stage production systems. *European Journal of Operational Research*, 211(3), 515–519. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.01.010>
- Kao, C., & Liu, S. T. (2011). Efficiencies of two-stage systems with fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, 176(1), 20–35. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2011.03.003>
- Kerstens, K., & Woestyne, I. V. D. (2014). A note on a variant of radial measure capable of dealing with negative inputs and outputs in DEA. *European Journal of Operational Research*, 234(1), 341–342. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.067>
- Lin, R. (2020). Cross-efficiency evaluation capable of dealing with negative data: A directional distance function based approach. *Journal of the Operational Research Society*, 71(3), 505–516. <https://doi.org/10.1080/01605682.2019.1567652>
- Lin, R., & Chen, Z. (2017). A directional distance based super-efficiency DEA model handling negative data. *Journal of the Operational Research Society*, 68(11), 1312–1322. <https://doi.org/10.1057/s41274-016-0137-8>
- Lin, R., Chen, Z., Hu, Q., & Li, Z. (2017). Dynamic network DEA approach with diversification to multi-period performance evaluation of funds. *OR Spectrum*, 39(3), 821–840. <https://doi.org/10.1007/s00291-017-0475-1>
- Lin, R., & Liu, Q. (2021). Multiplier dynamic data envelopment analysis based on directional distance function: An application to mutual funds. *European Journal of Operational Research*, 293(3), 1043–1057. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.01.005>
- Lin, R., & Liu, Y. (2019). Super-efficiency based on the directional distance function in the presence of negative data. *Omega*, 85, 26–34. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2018.05.009>
- Liu, J. S., Lu, L. Y. Y., & Lu, W. M. (2016). Research fronts in data envelopment analysis. *Omega*, 58, 33–45. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2015.04.004>
- Liu, J. S., Lu, L. Y. Y., Lu, W. M., & Lin, B. J. Y. (2013). A survey of DEA applications. *Omega*, 41(5), 893–902. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2012.11.004>
- Lovell, C. A. K., Walters, L. C., & Wood, L. L. (1994). Stratified models of education production using modified DEA and regression analysis. In A. Charnes, W. W. Cooper, A. Y. Lewin, & L. M. Seiford (Eds.), *Data envelopment analysis: Theory, methodology and applications* (pp. 329–351). Kluwer.
- Löthgren, M., & Tambour, M. (1999). Productivity and customer satisfaction in Swedish pharmacies: A DEA

- network model. *European Journal of Operational Research*, [115\(3\)](#), 449–458. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00177-5](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00177-5)
- Lu, Y. H., Chen, P. C., & Hsiao, T. Y. (2014). Operational efficiency in credit departments of farmers' associations with consideration of non-performing loans and negative values: Application of dynamic network DE. *The Macrotheme Review*, *3*, 150–164.
- Portela, M. C. A. S., Thanassoulis, E., & Simpson, G. (2004). Negative data in DEA: A directional distance approach applied to bank branches. *Journal of the Operational Research Society*, [55\(10\)](#), 1111–1121. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601768>
- Ruiz, J. L. (2013). Cross-efficiency evaluation with directional distance functions. *European Journal of Operational Research*, [228\(1\)](#), 181–189. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.01.030>
- Seiford, L. M., & Zhu, J. (1999). Profitability and marketability of the top 55 US commercial banks. *Management Science*, [45\(9\)](#), 1270–1288. <https://doi.org/10.1287/mnsc.45.9.1270>
- Tavana, M., Izadikhah, M., Caprio, D. D., & Saen, R. F. (2018). A new dynamic range directional measure for two-stage data envelopment analysis models with negative data. *Computers & Industrial Engineering*, [115](#), 427–448. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.11.024>
- Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, [130\(3\)](#), 498–509. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(99\)00407-5](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00407-5)
- Wang, C. H., Gopal, R., & Zionts, S. (1997). Use of data envelopment analysis in assessing information technology impact on firm performance. *Annals of Operations Research*, [73](#), 191–213. <https://doi.org/10.1023/A:1018977111455>
- Wanke, P. F., Hadi-Vencheh, A., & Forghani, A. (2018). A DDF based model for efficiency evaluation in two-stage DEA. *Optimization Letters*, [12\(5\)](#), 1029–1044. <https://doi.org/10.1007/s11590-017-1162-5>
- Zhu, W. W., Miao, Z. Y., & Pu, X. J. (2020). Serial network DEA models with a single intermediate measure. *Journal of the Operational Research Society*, *72(5)*, 1168–1173. <https://doi.org/10.1080/01605682.2020.1755899>

Efficiency decomposition based on Directional distance function in network data envelopment analysis

Somayyeh Rashid¹

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,
Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Hossein Azizi

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,
Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Shahruz Fathi Ajirlu

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Abstract

Directional Distance Function (DDF) multiplier network model, capable of handling negative data, has received little attention in the field of Data Envelopment Analysis (DEA). The series system is a basic type of DDF multiplier network model. This paper, assuming variable returns to scale, extends the series DEA multiplier model for use with DDF. The proposed series DDF model is non-oriented and can deal with negative data. The overall system efficiency score can be decomposed as a weighted average of process efficiency scores. In the DDF domain, process efficiency as a potential alternative to system efficiency is investigated. Additionally, the proposed model can also be applied for Constant Returns to Scale (CRS) assumption. Furthermore, we derive the mathematical relationship between the CRS form of the series DDF model and the series CCR model. An empirical example demonstrates the application and advantages of the new model.

Keywords: Data envelopment analysis; efficiency; performance.

¹Corresponding Author