

## تصمیم‌گیری گروهی در تحلیل پوششی داده‌ها

گلستان زاداحمد جعفرلو

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

حسین عزیزی

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

شهرروز فتحی اجیرلو

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

### چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها، تکنیکی است که به طور گسترده برای اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری و رتبه‌بندی گزینه‌ها براساس کارایی اندازه‌گیری‌شده، استفاده می‌شود. زمانی که نیاز به تخمین داده‌ها وجود دارد، با گروهی از کارشناس‌ها، مشورت می‌شود. با این حال، نتایج ممکن است سازگار نباشند که منجر به وضعیت پیچیده‌ای می‌شود که باید آن را دنبال کرد. در این مقاله، روشی برای تعیین وزن‌های مناسب پیشنهاد می‌شود که نظرات کارشناس‌ها از طریق آن، می‌تواند برای محاسبه کارایی گزینه‌ها به کار رود. براساس این ایده، یک مدل شعاعی و یک مدل اندازه‌مبتهی بر اسلک (SBM) پیشنهاد می‌شوند.

**واژگان کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، تصمیم‌گیری گروهی، سیستم موازی، کارایی شعاعی، کارایی اندازه‌مبتهی بر اسلک

## ۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، تکنیک توسعه‌یافته توسط چارلز، رودز و کوپر (۱۹۷۸) برای اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs) است که از ورودی‌های متعدد برای تولید خروجی‌های متعدد استفاده می‌کند. از زمان پیدایش DEA، هزاران کاربرد از آن گزارش شده است (به‌عنوان مثال به لیو، لو، لو و لین (۲۰۱۳) و کائو (۲۰۱۴) مراجعه کنید). DMUها را می‌توان براساس کارایی‌های محاسبه‌شده، رتبه‌بندی کرد. زمانی که گزینه‌های یک مسئله تصمیم‌گیری با DMU نشان داده می‌شوند، رتبه‌های DMUها می‌تواند برای انتخاب گزینه‌ها استفاده شود. مطالعه‌ای که توسط تامپسون، سینگلتن، ترال و اسمیت (۱۹۸۶) انجام شد و به دنبال تعیین محلی برای مکان‌یابی یک آزمایشگاه فیزیک ذرات بود، یک مثال کلاسیک است. آدلر، فریدمن و سینوانی - استرن (۲۰۰۲)، آلدامک و ذوالفقاری (۲۰۱۷) و حسین‌زاده لطفی و همکاران (۲۰۱۳) مروری بر روش‌های رتبه‌بندی DEA ارائه کردند. همچنین ثابت شده است که DEA، یک تکنیک کارا برای انتخاب گزینه‌ها است. در انتخاب گزینه‌ها، شرایطی وجود دارد که تعدادی از مشاهدات، شناخته‌شده نیستند و باید تخمین زده شوند. به عنوان مثال، در زمان خرید یک ماشین (دستگاه)، هزینه دقیق تعمیر و نگهداری، به دلیل عدم قطعیت‌های عملیاتی، مشخص نیست. بنابراین، باید آن را تخمین زد. افراد مختلف، معمولاً تخمین‌های متفاوتی را ارائه می‌دهند زیرا قضاوت‌های ذهنی در آن دخالت دارند. زمانی که قضاوت شخصی، در میان است، بهتر است به گروهی از کارشناس‌ها اتکا کرد تا اعمال سلیقه افراد کارشناس، کاهش یابد. چندین مطالعه مرتبط با DEA و تصمیم‌گیری گروهی در تحقیقات وجود دارند که می‌توانند به چهار نوع، دسته‌بندی شوند: نوع اول براساس مقایسه‌های زوجی از گزینه‌های انفرادی است. تکنیک DEA برای یافتن وزن‌های مناسب و تجمیع نظر تمام کارشناس‌ها برای شکل‌گیری تصمیم نهایی استفاده می‌شود (لیو، فانگ و چن، ۲۰۲۰، ۲۰۱۹). نوع دوم، از یک سیستم رای‌گیری ترجیحی استفاده می‌کند که ورودی سیستم، شامل آرای کارشناس‌ها و خروجی آن، رتبه‌بندی کل است. از تکنیک DEA برای تعیین وزن رتبه‌ها استفاده می‌شود (انگیز، امروزنژاد، مصطفی و کمیجان، ۲۰۰۹؛ ابراهیم‌نژاد، توانا و سانتوس آرتیگا، ۲۰۱۶). نوع سوم، از تکنیک DEA برای تعیین وزن‌ها در فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP) گروهی استفاده می‌کند (گروسلیج، مالوور و استیرن، ۲۰۱۱؛ حسینیان، نویدی و حاج‌فتحعلی‌ها، ۲۰۱۲؛ وانگ و چین، ۲۰۰۹ الف). در این سه نوع مطالعه، مقایسه‌های زوجی بین گزینه‌ها براساس عملکرد کلی آنها، بدون توجه به عملکرد معیارهای انفرادی (عوامل ورودی/خروجی) انجام می‌شود. ایده DEA، اندازه‌گیری کارایی یک DMU براساس ورودی‌های مصرفی و خروجی‌های تولیدی است. هر کارشناس با دنبال کردن این ایده، باید تخمین‌هایی را برای عوامل ورودی/خروجی تمام گزینه‌ها ارائه دهد که کارایی گزینه‌ها، براساس آن محاسبه شود. سپس کارایی‌های حاصل می‌تواند برای انتخاب گزینه‌ها استفاده شود. در این مطالعه، از نوع چهارم DEA استفاده شده است. توانا، خلیلی دامغانی و سعدی‌نژاد (۲۰۱۳)، ایده استفاده از میانگین هندسی تخمین‌های تمام کارشناس‌ها را برای محاسبه کارایی در یک محیط فازی ارائه دادند که نمونه‌ای از مطالعه نوع چهارم است.

مطالعات موجود نشان می‌دهند که تعیین نحوه تجمیع نظرات کارشناس‌ها، موضوعی کلیدی در تصمیم‌گیری گروهی است (گروکو، ایشیزاکا، تاسیو و توریسی، ۲۰۱۹). تجمیع نظرات می‌تواند یا در سطح داده‌ها و قبل از محاسبه کارایی صورت گیرد یا در سطح کارایی و بعد از محاسبه کارایی، انجام شود. ایده توانا و همکاران (۲۰۱۳) این است که نظرات کارشناس‌ها را در سطح داده‌ها تجمیع کنند و نظرات کارشناس‌ها در نوع AHP با چندین کارشناس انفرادی را پس از تجزیه و تحلیل‌ها، یعنی در سطح کارایی، تجمیع کنند (ساتی و وارگاس، ۲۰۰۱). در این مطالعه، یک سیستم شبکه‌ای متشکل از بخش‌های موازی را می‌سازیم تا این دو ایده را در نظر بگیرند. این سیستم، یک گزینه را نشان می‌دهد و هر بخش، نماینده یک کارشناس است. در سطح داده‌ها، داده‌های ارائه‌شده توسط تمام کارشناس‌ها، به منظور تشکیل ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم برای محاسبه کارایی سیستم تجمیع می‌شود و یک گزینه، براساس کارایی محاسبه‌شده، انتخاب می‌شود.

در سطح کارایی، داده‌های ارائه‌شده توسط هر کارشناس، برای محاسبه کارایی بخش مربوطه استفاده می‌شود و تجمیع تمام کارایی‌های بخش‌ها، کارایی سیستم را برای انتخاب گزینه‌ها، تشکیل می‌دهد. این دو رویکرد، ممکن است نتایج متفاوتی را به همراه داشته باشد که از نظر انتخاب گزینه مناسب، منجر به شرایط دشواری می‌شود. در این مقاله، مدلی پیشنهاد شده است که به ترتیب، قادر به یافتن

وزن‌های مناسب برای تجمیع داده‌ها و کارایی‌ها باشد. نشان داده شده است که کارایی سیستم محاسبه‌شده از داده‌های تجمعی، با کارایی‌هایی بخش تجمعی محاسبه‌شده از داده‌های کارشناس‌های انفرادی، یکسان است. این امر نشان می‌دهد که داده‌های ارائه‌شده توسط کارشناس‌های مختلف، به طور مناسب برای محاسبه کارایی سیستم تجمیع شده‌اند و کارایی‌های محاسبه‌شده از داده‌های ارائه‌شده توسط کارشناس‌های مختلف، به طور مناسب برای تشکیل کارایی سیستم، تجمیع شده‌اند. بنابراین، این کارایی سیستم، برای رتبه‌بندی گزینه‌ها، قابل اطمینان است.

ایده پیشنهادی برای یک مسئله انتخاب ربات در یک شرکت تولیدی در تایوان اعمال می‌شود. در این مسئله، داده‌های یک ورودی و یک خروجی برای محاسبه کارایی هجده ربات منتخب، توسط سه کارشناس تخمین زده می‌شود. در این مقاله، دو مدل، شامل یک مدل شعاعی و یک مدل SBM، ارائه شده است و یک ربات، براساس کارایی‌های محاسبه‌شده، انتخاب می‌شود. در بخش‌های بعدی، ابتدا دو مدل مورد استفاده در تجمیع نظرات کارشناس‌ها را معرفی می‌کنیم. نشان داده شده است که کارایی سیستم در هر دو مدل، برابر با میانگین وزنی کارایی‌های بخش است. سپس، حالت انتخاب ربات برای توضیح نحوه اعمال مدل‌های پیشنهادی برای انتخاب گزینه‌ها استفاده می‌شود. در نهایت، نتایجی براساس بحث در بخش‌های قبل، ارائه شده است.

## ۲- مدل شعاعی

یک مسئله انتخاب را با  $n$  گزینه در نظر بگیرید، که هر گزینه در آن، شبیه به یک واحد تولیدی است که از  $m$  ورودی  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  برای تولید  $s$  خروجی  $Y_r$ ,  $r = 1, \dots, s$  استفاده می‌کند. فرض کنید داده‌های برخی از عوامل ورودی/خروجی

مشخص نیست و به منظور ارائه تخمین‌ها برای داده‌ها، با  $q$  کارشناس مشورت

جدول ۱: داده‌ها و کارایی CCR محاسبه‌شده از تجمیع نظرات کارشناس‌ها در سطوح داده‌ها و کارایی برای مثال

گزینه	کارشناس	$X$	$Y$	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$E_k^{(p)}$	$\bar{E}_k$	$\bar{E}_k$
<b>A</b>	1	6	9	10	9	1	0.9	0.8627
	2	7	9			1		
	3	17	9			10/17		
<b>B</b>	1	8	9	9	9	3/4	1	0.8426
	2	9	9			7/9		
	3	10	9			1		

می‌شود. کارایی هر گزینه، براساس داده‌های تخمینی توسط کارشناس‌ها، می‌تواند از طریق مدل DEA محاسبه و برای رتبه‌بندی استفاده شود و گزینه‌هایی با رتبه برتر انتخاب شوند. موضوع اصلی، نحوه تجمیع نظرات کارشناس‌ها برای دستیابی به یک نتیجه نهایی است. هنگامی که گروهی از کارشناس‌ها در یک مطالعه DEA مشارکت دارند، نظرات آنها را می‌توان یا در سطح داده‌ها، تجمیع کرد که داده‌های ارائه‌شده توسط همه کارشناس‌ها، برای محاسبه کارایی گزینه، تجمیع می‌شوند، یا در سطح کارایی، تجمیع کرد که کارایی‌های محاسبه‌شده از داده‌های ارائه‌شده توسط کارشناس‌های انفرادی، برای ایجاد کارایی نهایی گزینه، تجمیع می‌شوند. یک حالت ساده برای به دست آوردن دیدگاهی از این دو سطح تجمیع، شامل استفاده از یک ورودی  $X$  برای تولید یک خروجی  $Y$  را در نظر بگیرید که در آن، دو گزینه  $A$  و  $B$  برای مقایسه وجود دارد. فرض می‌کنیم که ۹ واحد از خروجی  $Y$  مورد نیاز است. با این حال، مشخص نیست که

چند واحد از ورودی  $X$  برای تولید، مورد نیاز است. در خصوص مقادیر تخمینی  $X$  برای دو گزینه ارائه شده در ستون ۳ جدول ۱، با سه کارشناس مشورت شده است. فرض کنید مدل CCR (چارنز و همکاران، ۱۹۷۸) زیر برای محاسبه کارایی گزینه  $k$  استفاده شده است.

$$\begin{aligned} \max \quad & uY_k \\ \text{s.t.} \quad & vX_k = 1 \\ & uY_j - vX_j \leq 0, j = A, B \\ & u, v \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

که  $\varepsilon$  در آن، یک عدد غیرارشمیدسی مثبت کوچک است که در زمان اندازه‌گیری کارایی، برای اجتناب از نادیده گرفتن عوامل نامطلوب، بر ضرایب  $u$  و  $v$  اعمال می‌شود (چارنز و کوپر، ۱۹۸۴؛ چارنز، کوپر و رودز، ۱۹۷۹) و مقدار آن در این مثال، ۰/۰۰۰۱ تعیین شده است. اگر نظرات سه کارشناس در سطح داده‌ها، میانگین‌گیری شود، آنگاه گزینه  $A$ ، از ۱۰ واحد  $X$  برای تولید ۹ واحد  $Y$  استفاده خواهد کرد و گزینه  $B$ ، از ۹ واحد  $X$  برای تولید ۹ واحد  $Y$  استفاده خواهد کرد. همانطور که در جدول ۱ تحت عنوان  $E_k$  نشان داده شده است، کارایی‌های CCR دو گزینه، برابر با  $E_A = 0.9$  و  $E_B = 1$  است که حاکی از بهتر بودن گزینه  $B$  نسبت به گزینه  $A$  است. اگر از نظرات سه کارشناس برای محاسبه کارایی‌های مربوطه استفاده شود، آنگاه همانطور که در جدول ۱، تحت عنوان  $E_k^{(p)}$  نشان داده شده است، کارایی‌های CCR حاصل از سه کارشناس برای دو گزینه، برابر با  $(1.3/4)$ ،  $(1.7/9)$  و  $(10/17, 1)$  است. میانگین‌های ساده سه کارایی کارشناس‌ها برای دو گزینه، برابر با ۰.۸۶۲۷ و ۰.۸۴۲۶ است که حاکی از بهتر بودن گزینه  $A$  نسبت به گزینه  $B$  است. نتایج حاصل از میانگین‌گیری نظرات کارشناس‌ها در سطح داده‌ها، با نتایج حاصل از تجميع نظرات کارشناس‌ها در سطح کارایی، متفاوت است. بنابراین تصمیم‌گیرنده، در خصوص انتخاب گزینه، دچار سر در گمی خواهد شد. در نتیجه، مدلی که قادر به تولید نتایج ثابت در دو سطح باشد، مطلوب است.

فرض کنید  $X_{ij}^{(p)}$  و  $Y_{rj}^{(p)}$  به ترتیب مقادیر ورودی  $i$ -ام و خروجی  $r$ -ام را نشان دهند که توسط  $p$ -امین کارشناس،  $p = 1, \dots, q$  برای  $i$ -امین گزینه،  $i = 1, \dots, n$  تخمین زده شده است. فرض کنید تجميع در سطح داده‌ها انجام می‌شود و وزن‌های  $a_i^{(p)}$  و  $b_r^{(p)}$  به ترتیب در  $i$ -امین ورودی و  $r$ -امین خروجی و  $i$ -امین خروجی  $r$ -امین ورودی، یعنی برای  $p$ -امین کارشناس، به کار می‌روند.  $(X_{ij}, Y_{rj}) = (\sum_{p=1}^q a_i^{(p)} X_{ij}^{(p)}, \sum_{p=1}^q b_r^{(p)} Y_{rj}^{(p)})$  را داریم. سپس این مجموعه داده‌ها برای محاسبه کارایی گزینه ارزیابی شده، به کار می‌رود. استفاده از مجموع داده‌ها به تنهایی، منجر به از دست رفتن اطلاعات دقیق ارائه شده توسط کارشناس‌های انفرادی می‌شود. بنابراین، محدودیت‌های مربوط به هر کارشناسی که می‌تواند در محاسبه کارایی‌های کارشناس، استفاده شود، باید در نظر گرفته شود. در این حالت، مدل BCC بنکر، چارنز و کوپر (۱۹۸۴) برای اندازه‌گیری کارایی گزینه  $k$  از سمت ورودی و تحت فرض بازده به مقیاس متغیر (VRS) می‌تواند به شکل مضربی زیر فرموله شود:

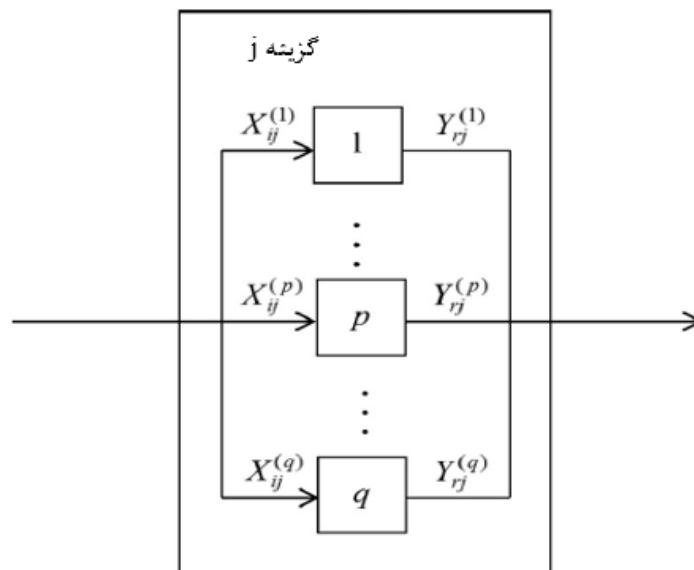
$$\begin{aligned}
 E_k^S = \max. & \sum_{r=1}^s u_r \left( \sum_{p=1}^q b_r^{(p)} Y_{rk}^{(p)} \right) - u_0 \\
 \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m v_i \left( \sum_{p=1}^q a_i^{(p)} X_{ik}^{(p)} \right) = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r \left( \sum_{p=1}^q b_r^{(p)} Y_{rj}^{(p)} \right) - u_0 - \sum_{i=1}^m v_i \left( \sum_{p=1}^q a_i^{(p)} X_{ij}^{(p)} \right) \\
 & \leq 0, j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{r=1}^s u_r \left( b_r^{(p)} Y_{rj}^{(p)} \right) - u_0^{(p)} - \sum_{i=1}^m v_i \left( a_i^{(p)} X_{ij}^{(p)} \right) \leq 0 \\
 & p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\
 & u_0 = \sum_{p=1}^q u_0^{(p)} \\
 & u_r, v_i \geq \varepsilon, r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m \\
 & b_r^{(p)}, a_i^{(p)} \geq 0, r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m \\
 & p = 1, \dots, q \\
 & u_0, u_0^{(p)} \text{ نامحدود در علامت هستند}, p = 1, \dots, q
 \end{aligned} \tag{۱}$$

اگر فناوری تولید، به صورت بازده به مقیاس ثابت (CRS) فرض شود، آنگاه  $u_0$  و  $u_0^{(p)}$  حذف می‌شوند و مدل BCC، تبدیل به مدل CCR می‌شود (چارلز و همکاران، ۱۹۷۸).

محدودیت مربوط به یک گزینه: "  $\sum_{r=1}^s u_r \left( \sum_{p=1}^q b_r^{(p)} Y_{rj}^{(p)} \right) - u_0 - \sum_{i=1}^m v_i \left( \sum_{p=1}^q a_i^{(p)} X_{ij}^{(p)} \right) \leq 0$  " در مدل (۱)، برابر با مجموع محدودیت‌های مربوط به  $q$  کارشناس این گزینه، یعنی  $\sum_{r=1}^s u_r \left( b_r^{(p)} Y_{rj}^{(p)} \right) - u_0^{(p)} - \sum_{i=1}^m v_i \left( a_i^{(p)} X_{ij}^{(p)} \right) \leq 0$  " است. بنابراین محدودیت‌های گزینه، زائد هستند و می‌توان آنها را حذف کرد. به علاوه، اصطلاحات غیرخطی  $u_r b_r^{(p)}$  و  $v_i a_i^{(p)}$  را می‌توان به ترتیب با  $u_r^{(p)}$  و  $v_i^{(p)}$  جایگزین کرد تا به برنامه خطی زیر تبدیل شود:

$$\begin{aligned}
 E_k^S = \max. & \quad \sum_{p=1}^q \sum_{r=1}^s u_r^{(p)} Y_{rk}^{(p)} - \sum_{p=1}^q u_0^{(p)} \\
 \text{s.t.} & \quad \sum_{p=1}^q \sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ik}^{(p)} = 1 \\
 & \quad \sum_{r=1}^s u_r^{(p)} Y_{rj}^{(p)} - u_0^{(p)} - \sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ij}^{(p)} \leq 0, p = 1, \dots, q, \\
 & \quad j = 1, \dots, n \\
 & \quad u_r^{(p)}, v_i^{(p)} \geq \varepsilon, r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m, p = 1, \dots, q \\
 & \quad u_0^{(p)} \text{ علامت در نامحدود در } p = 1, \dots, q,
 \end{aligned} \tag{2}$$

که به سادگی و همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده، مدلی است که برای محاسبه کارایی یک سیستم تولید استفاده می‌شود که دارای ساختار شبکه موازی متشکل از  $q$  بخش با عملکرد مستقل است (کائو، ۲۰۱۷). این سیستم، برابر با گزینه است و هر بخش، یک کارشناس را نشان می‌دهد. زمانی که وزن‌های  $\alpha_i^{(p)}$  و  $\beta_r^{(p)}$  به ترتیب برای تمام کارشناس‌ها، یکسان فرض می‌شوند، مدل (۲) به مدل رابطه‌ای پیشنهادی در کائو (۲۰۰۹) خلاصه می‌شود.



شکل ۱. مسئله انتخاب گزینه‌های ارائه‌شده توسط یک سیستم موازی.

کارایی گزینه  $k$  که توسط کارشناس  $t$  ارزیابی شده، برابر است با:

$$E_k^{(t)} = \left( \sum_{r=1}^s u_r^{(t)} Y_{rk}^{(t)} - u_0^{(t)} \right) / \sum_{i=1}^m v_i^{(t)} X_{ik}^{(t)}, t = 1, \dots, q, \tag{3}$$

و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_k^{(t)} = \max \sum_{r=1}^s u_r^{(t)} Y_{rk}^{(t)} - u_0^{(t)} \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m v_i^{(t)} X_{ik}^{(t)} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r^{(p)} Y_{rj}^{(p)} - u_0^{(p)} - \sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ij}^{(p)} \leq 0$$

$$p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n$$

$$u_r^{(p)}, v_i^{(p)} \geq \varepsilon, r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m, p = 1, \dots, q$$

$$u_0^{(p)} \text{ نامحدود در علامت است}, p = 1, \dots, q.$$

فرض کنید  $w^{(p)}$  وزن مربوط به کارشناس  $p$  برای ایجاد کارایی این گزینه باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ik}^{(p)}}{\sum_{p=1}^q \sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ik}^{(p)}} \quad (5)$$

که برابر با نسبت ورودی کل مورد استفاده توسط کارشناس  $p$  ام به ورودی مورد استفاده توسط تمام  $q$  کارشناس است. تجمیع کارایی‌های  $q$  کارشناس، برابر است با:

$$\sum_{p=1}^q w^{(p)} E_k^{(p)} = \sum_{p=1}^q \left( \frac{\sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ik}^{(p)}}{\sum_{p=1}^q \sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ik}^{(p)}} \right) \left( \frac{\sum_{r=1}^s u_r^{(p)} Y_{rk}^{(p)} - u_0^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ik}^{(p)}} \right)$$

$$= \frac{\sum_{p=1}^q \sum_{r=1}^s u_r^{(p)} Y_{rk}^{(p)} - \sum_{p=1}^q u_0^{(p)}}{\sum_{p=1}^q \sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ik}^{(p)}}.$$

بنابراین مدل محاسبه کارایی گزینه  $k$  به صورت زیر است:

$$\max \quad \frac{\sum_{p=1}^q \sum_{r=1}^s u_r^{(p)} Y_{rk}^{(p)} - \sum_{p=1}^q u_0^{(p)}}{\sum_{p=1}^q \sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ik}^{(p)}} \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^s u_r^{(p)} Y_{rj}^{(p)} - u_0^{(p)} - \sum_{i=1}^m v_i^{(p)} X_{ij}^{(p)} \leq 0, p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n$$

$$u_r^{(p)}, v_i^{(p)} \geq \varepsilon, r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m, p = 1, \dots, q$$

$$u_0^{(p)} \text{ نامحدود در علامت است}, p = 1, \dots, q,$$

جدول ۲: کارایی‌های محاسبه شده از مدل‌های پیشنهادی برای مثال

گزینه	کارشناس	$E_k^S$	$v^{(p)}$	$u^{(p)}$	$E_k^{(p)}$	$w^{(p)}$	$\rho_k^S$	$\rho_k^{(p)}$	$\omega^{(p)}$
A	1	0.9993	0.166233	0.110822	1.0000	0.9974	0.8108	1.0000	1.0000
	2		0.000129	0.000100	1.0000	0.0009		1.0000	1.0000
	3		0.000100	0.000111	0.5882	0.0017		0.5882	0.5882
B	1	0.9994	0.000150	0.000100	0.7500	0.0012	0.8289	0.7500	0.7500
	2		0.000129	0.000100	0.7778	0.0012		0.7778	0.7778

1.0000 1.0000 0.9976 1.0000 0.110849 0.099764 3

که دقیقاً مشابه با مدل (۲) است که تکنیک جایگزین متغیر معرفی شده در چارنز و کوپر (۱۹۶۲) در آن، اعمال می‌شود. بنابراین، یک نتیجه مطلوب را به دست آورده‌ایم که بیان می‌دارد در زمانی که وزن‌های مناسب، اعمال می‌شود، تجمیع داده‌های ارائه شده توسط کارشناس‌های مختلف برای محاسبه کارایی، همان نتایج تجمیعی از کارایی‌های محاسبه شده در داده‌های ارائه شده توسط کارشناس‌های انفرادی را تولید می‌کند. بنابراین کارایی  $E_k^S$  برای استفاده در رتبه‌بندی، قابل اعتماد و قابل قبول است. اگر بیش از یک گزینه کارا وجود داشته باشد، می‌توان از هر روش مناسبی برای رتبه‌بندی DMUهای کارا استفاده کرد تا تساوی را از بین برد.

با استفاده از مثال جدول ۱ برای توضیح این موضوع، مدل (۲) را با حذف  $u_0^{(p)}$ ، به منظور محاسبه کارایی سیستم  $E_k^S$  برای دو گزینه، تحت فناوری CRS اعمال می‌کنیم. نتایج، در ستون ۳ جدول ۲ نشان داده شده است. کارشناس  $p$  در سطح داده‌ها، وزن‌های  $a_i^{(p)}$  و  $b_r^{(p)}$  را به ترتیب برای تجمیع ورودی  $X_i$  و خروجی  $Y_r$  اعمال می‌کند تا کارایی سیستم  $E_k^S$  را محاسبه کند. در مدل (۲)، به ترتیب با  $v_i$  و  $u_r$  ترکیب شده‌اند تا  $v_i^{(p)}$  و  $u_r^{(p)}$  را تشکیل دهند. کارایی سیستم محاسبه شده از داده‌های تجمیعی، برابر با

$$E_k^S = \frac{\sum_{r=1}^s u_r \left( \sum_{p=1}^q b_r^{(p)} Y_{rk}^{(p)} \right) / \sum_{i=1}^m v_i \left( \sum_{p=1}^q a_i^{(p)} X_{ik}^{(p)} \right)}{\sum_{r=1}^s \sum_{p=1}^q u_r^{(p)} Y_{rk}^{(p)} / \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^q v_i^{(p)} X_{ik}^{(p)}}$$

است که معادل با

همزمان با حل کارایی سیستم  $E_k^S$ ، حل می‌شوند که نتایج آن، در ستون‌های ۴ و ۵ جدول ۲ نشان داده شده است. کارایی سیستم گزینه  $A$ ، براساس معادله  $\sum_{r=1}^s \sum_{p=1}^q u_r^{(p)} Y_{rk}^{(p)} / \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^q v_i^{(p)} X_{ik}^{(p)}$  و از داده‌های تجمیعی محاسبه شده است که مقدار آن برابر با  $(0.110822 \times 9 + 0.0001 \times 9 + 0.000111 \times 9) / (0.166233 \times 6 + 0.000129 \times 7 + 0.0001 \times 17)$  یعنی کارایی سیستم ۰.۹۹۹۳ ارائه شده در ستون ۳ است. برای گزینه  $B$  نیز کارایی سیستم محاسبه شده داده‌های تجمیعی، برابر با  $(0.0001 \times 9 + 0.0001 \times 9 + 0.110849 \times 9) / (0.00015 \times 8 + 0.000129 \times 9 + 0.099764 \times 10)$  یعنی کارایی سیستم ۰.۹۹۹۴ است.

محاسبه کارایی کارشناس  $E_k^{(p)}$  در سطح کارایی، از طریق عبارت (۳) و محاسبه وزن مربوطه  $w^{(p)}$  از طریق عبارت (۵) صورت می‌گیرد. نتایج، در ستون‌های ۶ و ۷ جدول ۲ نشان داده شده است. واضح است که میانگین وزنی کارایی‌های کارشناس برای گزینه  $A$  برابر با  $0.9974 \times 1 + 0.0009 \times 1 + 0.0017 \times 0.5882$ ، یعنی کارایی سیستم ۰.۹۹۹۳ است و برای گزینه  $B$  نیز برابر با  $0.0012 \times 0.75 + 0.0012 \times 0.7778 + 0.9976 \times 1$ ، یعنی کارایی سیستم ۰.۹۹۹۴ است. بنابراین تأیید می‌کنیم که تجمیع نظرات کارشناس‌ها در سطح داده‌ها و سطح کارایی، منجر به کارایی سیستم یکسانی می‌شود. نتایج این مثال، حاکی از بهتر بودن گزینه  $B$  نسبت به گزینه  $A$  است.

با توجه به این مثال، باید به دو رویداد اشاره کرد. رویداد اول این است که چندین  $v^{(p)}$  و  $u^{(p)}$  دارای مقدار  $\epsilon$ ، یعنی عدد غیر ارشمیدسی هستند که نشان می‌دهد کارایی سیستم، تحت تأثیر مقدار تخصیص داده شده به  $\epsilon$  است. رویداد دوم این است که به طور کلی، کارایی‌های کارشناس  $E_k^{(p)}$  بالاتر، دارای وزن‌های مرتبط  $w^{(p)}$  بزرگ‌تری هستند تا کارایی‌های سیستم بالاتری را به دست آورند. با این حال، کارایی‌هایی کارشناس بالاتر برای یک گزینه، به داده‌های مطلوب ارائه شده توسط یک کارشناس برای این گزینه، بستگی ندارند. بلکه به داده‌های ارائه شده توسط این کارشناس برای سایر گزینه‌ها، بستگی دارند. به عنوان مثال، کارایی کارشناس ۳ برای گزینه



$B$ ، برابر با ۱ است. با این حال، کارشناس ۳، داده‌های مطلوبی را برای گزینه  $B$  ارائه نداده است. در واقع، کارشناس ۳ در بین سه کارشناس، کمترین مقدار مطلوب  $X$  را برای گزینه  $B$  ارائه می‌دهد. دلیل کارایی بالای کارشناس ۳ برای گزینه  $B$ ، ارائه یک مقدار نامطلوب ۱۷ برای  $X$  برای گزینه  $A$  است.

### ۳- مدل SBM

می‌دانیم که مدل‌های شعاعی مانند مدل BCC که در بخش قبل استفاده شده است، از عدد غیرارشمیدسی  $\varepsilon$  که بر مضرب‌های  $u_r^{(p)}$  و  $v_i^{(p)}$  بر کارایی اعمال می‌شود، تاثیر نامطلوبی را می‌پذیرند. مدل دوگان (۲) را که به شکل پوششی زیر، فرموله شده است، در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E_k^S = \min. \quad & \theta - \varepsilon \left( \sum_{p=1}^q \sum_{i=1}^m s_i^{(p)-} + \sum_{p=1}^q \sum_{r=1}^s s_r^{(p)+} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)} + s_i^{(p)-} = \theta X_{ik}^{(p)}, p = 1, \dots, q, i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)} - s_r^{(p)+} = Y_{rk}^{(p)}, p = 1, \dots, q, r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1, p = 1, \dots, q \\ & \lambda_j^{(p)}, s_i^{(p)-}, s_r^{(p)+} \geq 0, \forall j, i, r, p. \end{aligned} \quad (7)$$

کارایی سیستم  $E_k^S$ ، فقط در صورتی می‌تواند عملکرد گزینه ارزیابی شده را به طور مناسب، منعکس کند که  $s_i^{(p)-}$  و  $s_r^{(p)+}$  در بهینگی، برابر با صفر باشند. یعنی  $\sum_{j \in F} \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)} = Y_{rk}^{(p)}$  و  $\sum_{j \in F} \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)} = \theta X_{ik}^{(p)}$  هستند که  $F$  در آن برابر با مجموعه شاخص DMUهای بسیار کارا است. در این حالت، DMU ارزیابی شده، در مخروط ایجاد شده توسط غلاف محدب ساخته شده از DMUهای بسیار کارا قرار دارد. از سوی دیگر، با توجه به تابع هدف مدل (۷)، اگر تعدادی از  $s_i^{(p)-}$  و/یا  $s_r^{(p)+}$ ها، مقادیر مثبت داشته باشند، امتیاز کارایی  $E_k^S$ ، تحت تاثیر مقدار تخصیص داده شده به  $\varepsilon$  خواهد بود، با توجه به اینکه معمولاً یک مقدار بسیار کوچک به  $\varepsilon$  تخصیص می‌یابد، در نتیجه  $E_k^S$ ، در زمانی که یک DMU در خارج از مخروط ایجاد شده توسط غلاف محدب ساخته شده از DMUهای بسیار کارا قرار می‌گیرد، عملکرد DMU ارزیابی شده را بزرگ‌نمایی می‌کند. برای حل این مشکل، می‌توان از مدل SBM پیشنهادی در تون (۲۰۰۱) استفاده کرد.

محدودیت‌های مدل (۷) نشان می‌دهد که مجموعه امکان تولید (PPS) این مسئله برابر است با

$$T = \left\{ (X_i^{(p)}, Y_r^{(p)}) \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)} \leq X_i^{(p)}, i = 1, \dots, m, p = 1, \dots, q, \text{ and } \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)} \geq Y_r^{(p)}, r = 1, \dots, s, p = 1, \dots, q, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1, p = 1, \dots, q, \lambda_j^{(p)} \geq 0 \right\}$$

کارایی SBM برای گزینه  $k$  را براساس این PPS، می‌توان از طریق مدل SBM زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \rho_k^S = \min \quad & \frac{1 - \frac{1}{mq} \sum_{p=1}^q \sum_{i=1}^m s_i^{(p)-} / X_{ik}^{(p)}}{1 + \frac{1}{sq} \sum_{p=1}^q \sum_{r=1}^s s_r^{(p)+} / Y_{rk}^{(p)}} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)} + s_i^{(p)-} = X_{ik}^{(p)}, p = 1, \dots, q, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)} - s_r^{(p)+} = Y_{rk}^{(p)}, p = 1, \dots, q, r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1, p = 1, \dots, q$$

$$\lambda_j^{(p)}, s_i^{(p)-}, s_r^{(p)+} \geq 0, \forall p, j, i, r.$$

اگر CRS به عنوان فناوری تولید هر بخش، در نظر گرفته شود، آنگاه محدودیت تحدب  $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1$  حذف می‌شود. اثرات متغیرهای اسلک  $s_i^{(p)-}$  و  $s_r^{(p)+}$  بر کارایی سیستم به جای اینکه به صورت  $s_i^{(p)-}$  و  $s_r^{(p)+}$  باشد به ترتیب به صورت  $s_i^{(p)-} | X_{ik}^{(p)}$  و  $s_r^{(p)+} | Y_{rk}^{(p)}$  بیان می‌شوند. بنابراین مشکل نحوه تخصیص یک مقدار مناسب به  $\varepsilon$  حذف می‌شود.

از نظر مفهومی،  $\rho_k^{\varepsilon}$  که کارایی SBM برای  $DMU^k$  در مدل (۸) است، از داده‌های تجمیعی ارائه‌شده توسط کارشناس‌ها محاسبه می‌شود. کارایی SBM کارشناس  $\varepsilon$ ، از دیدگاه کارشناس‌های انفرادی، برابر است با:

$$\rho_k^{(\varepsilon)} = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^{(\varepsilon)-} / X_{ik}^{(\varepsilon)}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^{(\varepsilon)+} / Y_{rk}^{(\varepsilon)}}, \varepsilon = 1, \dots, q \quad (9)$$

و از طریق مدل زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho_k^{(\varepsilon)} = \min. \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^{(\varepsilon)-} / X_{ik}^{(\varepsilon)}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^{(\varepsilon)+} / Y_{rk}^{(\varepsilon)}} \quad (10)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)} + s_i^{(p)-} = X_{ik}^{(p)}, p = 1, \dots, q, i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)} - s_r^{(p)+} = Y_{rk}^{(p)}, p = 1, \dots, q, r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1, p = 1, \dots, q$$

$$\lambda_j^{(p)}, s_i^{(p)-}, s_r^{(p)+} \geq 0, \forall p, j, i, r.$$

توجه کنید که  $1 - s_i^{(\varepsilon)-} / X_{ik}^{(\varepsilon)}$  برابر با کارایی  $i$ -امین ورودی و  $1 / (1 + s_r^{(\varepsilon)+} / Y_{rk}^{(\varepsilon)})$  برابر با کارایی  $r$ -امین خروجی است. صورت کسر  $\rho_k^{(\varepsilon)}$  در عبارت (۹)، برابر با میانگین  $m$  کارایی ورودی و مخرج کسر، برابر با معکوس میانگین هارمونیک  $s$  کارایی خروجی است. در نتیجه، کارایی کارشناس  $\rho_k^{(\varepsilon)}$ ، برابر با حاصل ضرب میانگین حسابی کارایی ورودی و میانگین هارمونیک کارایی خروجی است.

فرض کنید  $\omega^{(p)}$  وزن مربوط به کارشناس  $p$ -ام برای تجمیع کارایی‌های تمام  $q$  کارشناس باشد تا کارایی را برای گزینه  $k$  ایجاد کند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega^{(p)} = \frac{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^{(p)+} / Y_{rk}^{(p)}}{\sum_{p=1}^q \left( 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^{(p)+} / Y_{rk}^{(p)} \right)} \quad (11)$$

یعنی برابر با نسبت معکوس کارایی میانگین هارمونیک کارشناس  $p$  به مجموع معکوس‌های کارایی‌های خروجی میانگین هارمونیک تمام  $q$  کارشناس است. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^q \omega^{(p)} p_k^{(p)} &= \sum_{p=1}^q \left( \frac{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^{(p)+} / Y_{rk}^{(p)}}{\sum_{p=1}^q \left( 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^{(p)+} / Y_{rk}^{(p)} \right)} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^{(p)-} / X_{ik}^{(p)}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^{(p)+} / Y_{rk}^{(p)}} \right) \\ &= \frac{\sum_{p=1}^q \left( 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^{(p)-} / X_{ik}^{(p)} \right)}{\sum_{p=1}^q \left( 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^{(p)+} / Y_{rk}^{(p)} \right)} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{mq} \sum_{p=1}^q \sum_{i=1}^m s_i^{(p)-} / X_{ik}^{(p)}}{1 + \frac{1}{sq} \sum_{p=1}^q \sum_{r=1}^s s_r^{(p)+} / Y_{rk}^{(p)}}\end{aligned}$$

مدل مربوطه برابر است با:

$$\begin{aligned}\min. \quad & \frac{1 - \frac{1}{mq} \sum_{p=1}^q \sum_{i=1}^m s_i^{(p)-} / X_{ik}^{(p)}}{1 + \frac{1}{sq} \sum_{p=1}^q \sum_{r=1}^s s_r^{(p)+} / Y_{rk}^{(p)}} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)} + s_i^{(p)-} = X_{ik}^{(p)}, p = 1, \dots, q, i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)} - s_r^{(p)+} = Y_{rk}^{(p)}, p = 1, \dots, q, r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1, p = 1, \dots, q \\ & \lambda_j^{(p)}, s_i^{(p)-}, s_r^{(p)+} \geq 0, \forall p, j, i, r,\end{aligned} \quad (12)$$

که دقیقاً مشابه با مدل (۸) است. به عبارت دیگر، نتیجه مشابهی با مدل شعاعی به دست آورده‌ایم که بیان می‌دارد داده‌های تجمیعی از کارشناس‌های مختلف، یک کارایی گزینه را ایجاد می‌کند که همان کارایی تجمیعی به دست‌آمده از کارایی‌های محاسبه‌شده در داده‌های ارائه‌شده توسط کارشناس‌های انفرادی است. بنابراین از نظر تجمیع در سطح داده‌ها و سطح کارایی، هیچ تناقضی برای محاسبه کارایی گزینه وجود ندارد. زمانی که بیش از یک گزینه کارا وجود دارد، می‌توان از یک روش رتبه‌بندی برای رتبه‌بندی گزینه‌های کارا استفاده کرد.

مثال مورد بحث در مدل شعاعی را با داده‌های جدول ۱ در نظر بگیرید. کارایی SBM گزینه  $k$  با فرض بازده به مقیاس ثابت را می‌توان از طریق مدل (۸) و با حذف محدودیت  $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1$  محاسبه کرد. نتایج، در ستون ۸ جدول ۲، تحت عنوان  $p_k^s$  نشان داده شده است. مدل (۸) همچنین قادر است کارایی هر کارشناس را از طریق عبارت (۹) و وزن مربوط به هر کارشناس برای تجمیع را از طریق عبارت (۱۱) محاسبه کند. نتایج، در دو ستون آخر جدول ۲ نشان داده شده است.

به راحتی می‌توان تأیید کرد که میانگین وزنی سه کارایی کارشناس، برابر با کارایی سیستم گزینه است. به طور خاص، میانگین وزنی  $0.270270 \times 1 + 0.270270 \times 1 + 0.459459 \times 0.5882$  را داریم که برابر با کارایی سیستم  $0.8108$  گزینه  $A$  و میانگین

وزنی  $1 \times 0.276316 + 0.7778 \times 0.355263 + 0.75 \times 0.368421$  را داریم که برابر با کارایی سیستم ۰.۸۲۸۹ گزینه B است، نتایج، حاکی از بهتر بودن گزینه B نسبت به گزینه A است.

در این مثال، اشاره شده است که در زمان محاسبه کارایی گزینه، کارایی‌های کارشناس کوچک‌تر، دارای وزن‌های بزرگ‌تری هستند. به عنوان مثال، کوچک‌ترین کارایی کارشناس برای گزینه A برابر با ۰.۵۸۸۲ است که بیشترین وزن ۰.۴۵۹۴۵۹ را دارد و کوچک‌ترین کارایی کارشناس برای گزینه B برابر با ۰.۷۵ است که بیشترین وزن ۰.۳۶۸۴۲۱ را دارد، اگرچه این تفاوت، قابل توجه نیست. به عبارت دیگر، کارایی‌های کارشناس کوچک‌تر، بیشتر در تجمیع، مورد توجه قرار می‌گیرند. زیرا مدل SBM در واقع، به جای محاسبه بیشترین کارایی برای هر گزینه، کوچک‌ترین کارایی را برای آن، محاسبه می‌کند. با این حال، مشابه با حالت کارایی CCR، کارشناسی که داده‌های نامطلوب را برای یک گزینه ارائه می‌کند، لزوماً کارایی کارشناس نامطلوب را برای این گزینه ایجاد نمی‌کند. این امر همچنین به داده‌های ارائه شده برای سایر گزینه‌ها، بستگی دارد.

با وجود اینکه، کارایی گزینه به دست آمده از هر دو مدل شعاعی و مدل SBM را می‌توان به عنوان میانگین وزنی کارایی‌های کارشناس بیان کرد، ولی نتایج مدل SBM در مقایسه با مدل شعاعی، قابل اعتمادتر است زیرا کارایی‌ها در این حالت، تحت تأثیر عدد غیر ارشمیدسی  $\varepsilon$  نیستند. در بخش بعدی، از مسئله انتخاب ربات، به منظور شرح نحوه اعمال مدل‌های پیشنهادی برای انتخاب بهترین ربات استفاده می‌کنیم.

جدول ۳: داده‌های ورودی و خروجی برای هجده ربات مورد بررسی

ربات	هزینه کل $X$ (\$1000) (E1, E2, E3)	ظرفیت بار $F_1$ (kg)	سرعت $F_2$ (m/s)	بهبود $F_3$ (%) (E1, E2, E3)
1	(390,350,355)	55	6	(22,17,18)
2	(245,259,360)	60	7	(23,21,20)
3	(265,261,257)	18	4.4	(14,17,12)
4	(225,234,235)	16	3	(10,11,10)
5	(188,187,181)	20	2.2	(11,9,8)
6	(298,304,325)	60	2.7	(18,20,16)
7	(341,354,351)	43	2.8	(20,21,20)
8	(259,273,272)	10	3.3	(16,17,19)
9	(301,281,303)	25	5	(22,20,22)
10	(350,361,363)	60	5	(25,19,18)
11	(295,287,275)	45	3	(12,10,13)
12	(250,249,243)	25	6	(9,7,10)
13	(290,301,315)	35	6.8	(10,13,11)
14	(210,213,221)	15	3.5	(6,8,7)
15	(255,232,263)	60	4.8	(18,17,20)
16	(248,230,242)	30	3.8	(12,11,10)
17	(304,307,310)	70	5.4	(17,15,14)
18	(232,239,246)	22	3.6	(13,15,14)

#### ۴- انتخاب ربات

شرکتی در صنعت تلویزیون مدار بسته (CCTV) در تایوان، محصولات متنوعی با کیفیت بالا از جمله نمایشگرهای LCD، دوربین‌های عقب خودرو و ضبط کننده‌های ویدئویی دیجیتال را تولید می‌کند. محیط تولید مدرنیزه شده و تجهیزات پیشرفته، این شرکت را به

شرکتی پیشرو در صنعت دوربین مداربسته تبدیل کرده است. در سال‌های اخیر، مشتریان اقدام به خرید محصولات از بازار جهانی کرده‌اند که تعداد رقیبان آن را افزایش داده است. این شرکت، برای افزایش سطح رقابت، به دنبال استفاده از یک سیستم رباتی با هدف افزایش انعطاف‌پذیری و قابلیت تولید خود است تا بتوان سفارش‌های مختلف را با هزینه کمتر و در زمان کمتر، تکمیل کرد. هجده ربات در حال بررسی هستند و کمیته‌ای متشکل از سه کارشناس ارشد مهندسی به منظور تعیین مناسب‌ترین ربات برای هدف مورد نظر، تشکیل شده است.

چندین رویکرد در تحقیقات برای ارزیابی و انتخاب ربات‌ها پیشنهاد شده است (براگلیا و پترونی، ۱۹۹۹؛ کارساک و آهیسکا، ۲۰۰۵؛ تالوری و یون، ۲۰۰۰؛ وانگ و چین، ۲۰۰۹ ب). کمیته براساس مطالعات مربوطه و در نظر گرفتن وضعیت شرکت، تصمیم به اتخاذ رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها گرفت که از هزینه کل به عنوان ورودی و ظرفیت بار، سرعت و بهبود، به عنوان خروجی‌ها استفاده می‌کند. هزینه کل شامل هزینه‌های تدارکات و هزینه‌های تخمینی عملیات و نگهداری یک ربات است. از آنجایی که هزینه‌های نگهداری به عملکرد صحیح ربات بستگی دارد و از قبل، مشخص نیست. بنابراین کارشناس‌های مختلف، تخمین‌های متفاوتی از آن دارند. ظرفیت بار، حداکثر بار حمل‌شده توسط یک ربات است که می‌تواند شامل بار واقعی و وزن گریپر باشد. این داده‌ها توسط تولیدکننده ربات ارائه شده و یک عدد ثابت است. سرعت یک ربات، مسافت طی‌شده توسط بازوی ربات در واحد زمان است که توسط تولیدکننده ربات نیز ارائه می‌شود. این بهبود، توان عملیاتی است که انتظار می‌رود به دلیل استفاده از ربات، افزایش یابد. این عدد توسط کارشناس‌ها، تخمین زده شده است. به طور خلاصه، دو عامل ظرفیت بار و سرعت وجود دارند که داده‌ها در آن، مقادیر ثابتی هستند که توسط تولیدکننده ربات، ارائه شده است و دو عامل هزینه کل و بهبود وجود دارند که داده‌ها در آن، توسط کارشناس‌ها، تخمین زده می‌شود. در جدول ۳، داده‌های هجده ربات نشان داده شده است که هزینه کل  $(X)$  برحسب ۱۰۰۰ دلار آمریکا، ظرفیت بار  $(Y_1)$  برحسب کیلوگرم و سرعت  $(Y_2)$  بر حسب متر برثانیه است. بهبود  $(Y_3)$  نیز برحسب درصد بیان می‌شود. این سه کارشناس، سه تخمین برای هزینه کل و بهبودهای ارائه داده‌اند که با  $E_1$ ،  $E_2$  و  $E_3$  نشان داده شده است.

ورودی این مثال، هزینه کل است. این شرکت نمی‌خواهد رباتی داشته باشد که میانگین خروجی آن برای هر واحد پول، حتی در زمان بالا بودن خروجی کل، اندک باشد، به‌علاوه، هزینه‌های هجده ربات، تفاوت قابل‌توجهی با یکدیگر ندارند. در نتیجه، یک فناوری CRS استفاده می‌شود. هر دو مدل شعاعی و SBM برای تعیین ربات مورد نظر اعمال می‌شوند.

#### ۴-۱- مدل شعاعی

مدل (۲)، با پارامترهای حذف‌شده  $u_0^{(p)}$ ، برای محاسبه کارایی  $CCR E_k^5$  هجده ربات استفاده می‌شود. نتایج، در ستون ۲ جدول ۴ نشان داده شده است که اعداد داخل پرانتز، رتبه‌های کارایی‌های مربوطه هستند. کارایی ربات را می‌توان به صورت میانگین وزنی از سه کارایی کارشناس  $E_k^{(p)}$  با وزن  $w^{(p)}$  تعریف‌شده در عبارت (۵)، بیان کرد. سه کارایی کارشناس و وزن‌های مربوطه، در سه ستون آخر جدول ۴ در داخل پرانتز نشان داده شده‌اند. استفاده از ربات شماره ۱ برای توضیح این امر، نشان می‌دهد که کارایی ربات، ۰.۸۱۴۲ است که برابر با  $0.0390 \times 0.5930 \pm 0.0350 \times 0.6595 \pm 0.9260 \times 0.8293$  است.

جدول ۴ نشان می‌دهد که کارایی‌های تمام ربات‌ها، کوچک‌تر از یک است که حاکی از کارا نبودن تمام ربات‌ها می‌باشد. با این حال، تعدادی از کارایی‌های کارشناس در سه ربات شماره ۲، ۱۲ و ۱۵، برابر با یک هستند. این سه ربات در واقع، کارایی ضعیفی دارند. یعنی مقدار  $\theta$  بهینه محاسبه‌شده از مدل (۷)، برابر با یک است و برخی از متغیرهای اسلک، در بهینگی، صفر نیستند. کارایی این ربات‌ها، تحت تأثیر مقدار تخصیص داده‌شده به عدد غیر ارشمیدسی  $\epsilon$  است. در این مطالعه،  $\epsilon$  برابر با ۰/۰۰۰۱ تعیین شده است. در زمان تجمیع کارایی‌های کارشناس برای تشکیل کارایی ربات، بالاترین کارایی کارشناس برای هر ربات، دارای وزنی بیشتر از ۰.۹۲ است (به جدول ۴ مراجعه کنید)، که نشان می‌دهد کارایی ربات، تقریباً به طور کامل، توسط یک کارشناس توانمند تعیین می‌شود و نظرات دو کارشناس

دیگر، تقریباً هیچ تأثیری بر کارایی ربات ندارد. به نظر می‌رسد که ربات شماره ۱۵، بالاترین کارایی ربات را دارد و پس از آن، ربات شماره ۲ و شماره ۱۲ قرار دارند. لذا براساس کارایی CCR، ربات شماره ۱۵ باید خریداری شود.

#### ۴-۲- مدل SBM

با اعمال مدل (۸) به همراه حذف محدودیت تحذب  $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1$  برای بیان فناوری CRS، می‌توان کارایی SBM  $\rho_k^S$  را برای هجده روبات محاسبه کرد. نتایج در ستون ۲ جدول ۵ نشان داده شده است که اعداد داخل پرانتز، رتبه‌های کارایی مربوطه هستند. کارایی ربات می‌تواند به عنوان میانگین وزنی از سه کارایی کارشناس  $\rho_k^{(p)}$  تعریف‌شده در عبارت (۹) و وزن  $w^{(p)}$  تعریف‌شده در عبارت (۱۱) نیز بیان شود. نتایج برای هجده ربات، در سه ستون آخر جدول ۵ نشان داده شده است که اعداد داخل پرانتز، وزن کارشناس‌های مربوطه هستند. به عنوان مثال، کارایی ربات شماره ۱، برابر با ۰.۶۳۹۳ است که برابر با to  $0.3829 \times 0.5706 + 0.3438 \times 0.6356 + 0.2733 \times 0.7403$  می‌باشد. ربات شماره ۲ براساس کارایی SBM، یکی از گزینه‌های خرید است. این نتیجه، با نتیجه کارایی CCR تفاوت دارد.

#### ۴-۳- بحث

همان‌طور که در بخش ۳ بحث شد، کارایی‌های شعاعی فقط برای آن دسته از DMU‌هایی قابل‌اعتماد هستند که در مخروط تولیدشده توسط غلاف محدب ایجادشده از DMU‌های بسیار کارا، ساخته شده‌اند. زیرا در این حالت، متغیرهای اسلک، صفر هستند به طوری که کارایی، تحت تأثیر مقدار تخصیص داده‌شده به عدد غیر ارشمیدسی  $\varepsilon$  قرار نمی‌گیرد. در این مثال، تمام ربات‌ها دارای متغیرهای اسلک با مقادیر مثبت هستند و کارایی‌هایی CCR، عملکرد ربات‌ها را به طور مناسب، منعکس نمی‌کنند. در مورد دو ربات برتر شماره ۲ و شماره ۱۵، ربات اول، دارای دو اسلک مثبت  $s_1^{(3)+} = 23.6208$  و  $s_3^{(3)+} = 0.9167$  در بهینگی است که از مدل پوششی (۷) محاسبه شده است. کارایی CCR نیز برابر  $E_2^S = 1 - \varepsilon \times (23.6208 + 0.9167) = 0.9975$  است. ربات دوم نیز دارای سه اسلک مثبت  $s_1^{(1)+} = 10.0$ ،  $s_2^{(1)+} = 2.2$  و  $s_3^{(1)+} = 5.0$  است و کارایی CCR برابر با  $E_{15}^S = 1 - \varepsilon \times (10.0 + 2.2 + 5.0) = 0.9983$  است که به مقدار  $\varepsilon$  بستگی دارد.

جدول ۴: کارایی‌های محاسبه‌شده از مدل CCR برای مسئله انتخاب ربات

ربات	$E_k^S(w^{(3)})$	$E_k^S(w^{(2)})$	$E_k^S(w^{(1)})$	$E_k^S(w^{(4)})$
1	0.8293(0.9260)	0.6595(0.0350)	0.5930(0.0390)	0.8142[9]
2	0.9318(0.0360)	1.0000(0.0259)	1.0000(0.9381)	0.9975[2]
3	0.7354(0.0257)	0.8000(0.9478)	0.5050(0.0265)	0.7905[10]
4	0.6373(0.9541)	0.5110(0.0234)	0.4284(0.0225)	0.6296[17]
5	0.6288(0.9625)	0.5587(0.0187)	0.5709(0.0188)	0.6264[18]
6	0.7905(0.0325)	0.8294(0.9377)	0.7909(0.0298)	0.8270[8]
7	0.7472(0.9305)	0.6718(0.0354)	0.5882(0.0341)	0.7392[13]
8	0.9135(0.9468)	0.6181(0.0273)	0.5294(0.0259)	0.8955[7]
9	0.9504(0.9418)	0.7575(0.0281)	0.6653(0.0301)	0.9364[5]
10	0.7372(0.0363)	0.6776(0.0361)	0.7600(0.9276)	0.7562[12]
11	0.7170(0.9418)	0.5946(0.0287)	0.5975(0.0295)	0.7100[15]
12	1.0000(0.9501)	0.7413(0.0249)	0.6914(0.0250)	0.9858[3]

0.9103(0.9409)	0.7339(0.0301)	0.6978(0.0290)	0.8989[6]	13
0.6712(0.9577)	0.5258(0.0213)	0.4857(0.0210)	0.6642[16]	14
1.0000(0.0263)	1.0000(0.9482)	0.9325(0.0255)	0.9983[1]	15
0.7363(0.9522)	0.5984(0.0230)	0.5240(0.0248)	0.7278[14]	16
0.9888(0.9389)	0.8653(0.0307)	0.8988(0.0304)	0.9822[4]	17
0.7765(0.9529)	0.6809(0.0239)	0.5440(0.0232)	0.7688[11]	18

جدول ۵: کارایی‌های محاسبه‌شده از مدل SBM برای مسئله انتخاب ربات

ربات	$\rho_k^5$ [رتبه]	$\rho_k^{(1)}(\omega^{(1)})$	$\rho_k^{(2)}(\omega^{(2)})$	$\rho_k^{(3)}(\omega^{(3)})$
1	0.6393 [5]	0.5706 (0.3829)	0.6356 (0.3438)	0.7403 (0.2733)
2	0.9492 [1]	1.0000 (0.3164)	1.0000 (0.3164)	0.8616 (0.3672)
3	0.4654 [14]	0.4223 (0.4019)	0.4833 (0.2821)	0.5040 (0.3159)
4	0.4149 [16]	0.3897 (0.4672)	0.4155 (0.2540)	0.4568 (0.2788)
5	0.4993 [12]	0.4726 (0.3963)	0.4880 (0.3838)	0.5675 (0.2198)
6	0.5470 [10]	0.5064 (0.4059)	0.5505 (0.3181)	0.6027 (0.2760)
7	0.4628 [15]	0.4272 (0.3940)	0.4484 (0.3754)	0.5470 (0.2306)
8	0.3112 [18]	0.2969 (0.3592)	0.3015 (0.3536)	0.3410 (0.2872)
9	0.5566 [9]	0.5039 (0.3899)	0.5701 (0.3025)	0.6100 (0.3076)
10	0.6442 [4]	0.6325 (0.3697)	0.6140 (0.3809)	0.7077 (0.2494)
11	0.4950 [13]	0.4462 (0.4083)	0.4695 (0.3881)	0.6416 (0.2037)
12	0.5784 [7]	0.4802 (0.4015)	0.4752 (0.4057)	1.0000 (0.1928)
13	0.5935 [6]	0.5025 (0.3937)	0.5922 (0.3340)	0.7265 (0.2723)
14	0.3963 [17]	0.3559 (0.4497)	0.4229 (0.2301)	0.4339 (0.3202)
15	0.9101 [2]	0.7715 (0.3932)	1.0000 (0.3034)	1.0000 (0.3034)
16	0.5653 [8]	0.5146 (0.4444)	0.5874 (0.2380)	0.6195 (0.3176)
17	0.7312 [3]	0.6895 (0.3547)	0.7123 (0.3434)	0.8017 (0.3019)
18	0.5310 [11]	0.4919 (0.4191)	0.5354 (0.2980)	0.5843 (0.2829)

مدل SBM، کارایی را از طریق معادله  $\rho_k^S = \left[ 1 - \frac{1}{3} \sum_{p=1}^3 s_1^{(p)-} / X_{1k}^{(p)} \right] / \left[ 1 + \frac{1}{3 \times 3} \sum_{p=1}^3 \sum_{r=1}^3 s_r^{(p)+} / Y_{rk}^{(p)} \right]$  محاسبه می‌کند.

به‌عنوان مثال برای ربات شماره ۲، دو اسلک مثبت  $s_1^{(3)+} = 13.7731$  و  $s_3^{(3)+} = 5.0486$  در بهینگی وجود دارد که از مدل (۸) محاسبه شده است. کارایی SBM مربوطه برابر با  $\rho_2^S = 1/[1 + (13.7731/60 + 5.0486/20)/9] = 0.9492$  است. برای ربات شماره ۱۵، سه اسلک مثبت  $s_1^{(1)+} = 2.4490$ ،  $s_2^{(1)+} = 2.4857$  و  $s_3^{(1)+} = 5.9388$  در بهینگی وجود دارد. کارایی مربوطه برابر با  $\rho_{15}^S = 1/[1 + (2.4490/60 + 2.4857/4.8 + 5.9388/18)/9] = 0.9101$  است. مقادیر اسلک در این مدل، در



مقایسه با مدل شعاعی، موقعیت DMU ارزیابی شده نسبت به مرز بسیار کارا را به طور مناسب تر نشان می‌دهند. به علاوه، وزن‌های مرتبط با سه کارشناس برای هر ربات، در محدوده ۰.۱۹ تا ۰.۴۷ قرار دارد (به جدول ۵ مراجعه کنید)، که نشان می‌دهد نظرات هر سه کارشناس، به طور مناسب در نظر گرفته شده است، زیرا هیچ کارشناسی بر تصمیم‌گیری، غالب نیست. بنابراین، نتایج مدل SBM برای رتبه‌بندی گزینه‌ها، قابل اعتمادتر است و در نهایت، ربات شماره ۲ انتخاب می‌شود.

## ۵- نتیجه‌گیری

رتبه‌بندی گزینه‌ها در بسیاری از موارد، با استفاده از یک تحلیل تصمیم‌گیری چندمعیاره انجام می‌شود. زمانی که معیارهای موردنظر به عنوان ورودی‌ها و خروجی‌های یک فرآیند تولید، طبقه‌بندی می‌شوند، می‌توان از تحلیل پوششی داده‌ها استفاده کرد. این مقاله، در زمانی که داده‌های برخی از عوامل ورودی و/یا خروجی باید توسط کارشناس‌ها تخمین زده شوند، حالتی را مورد بحث قرار می‌دهد که از رویکرد DEA برای رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده می‌کند. در این حالت، معمولاً با چند کارشناس مشورت می‌شود و نظرات آنها برای کاهش برای کاهش اعمال سلیقه افراد، جمع می‌شود. به عبارت دیگر، دارای یک مسئله تصمیم‌گیری گروهی DEA هستیم. در تصمیم‌گیری گروهی، نظرات کارشناس‌های مختلف، یا در سطح داده‌ها جمع می‌شود و برای محاسبه کارایی گزینه استفاده می‌شود، یا در سطح کارایی جمع می‌شود و کارایی محاسبه‌شده از داده‌های ارائه‌شده توسط کارشناس‌های انفرادی برای تشکیل کارایی کل، استفاده می‌شود. در این مقاله، روشی برای تعیین وزن‌های مناسب برای جمع داده‌های ارائه‌شده توسط کارشناس‌های مختلف در یک مدل واحد پیشنهاد شده است تا کارایی یک گزینه محاسبه شود و کارایی‌های محاسبه‌شده از داده‌های کارشناس‌های انفرادی برای این گزینه، جمع شود. یک مدل شعاعی و یک مدل SBM ایجاد شده است. عملکرد این مدل، مشابه با محاسبه کارایی یک سیستم شبکه موازی است که سیستم در آن، یک گزینه را نشان می‌دهد و هر بخش، نماینده یک کارشناس است. یکی از ویژگی‌های سیستم موازی این است که کارایی سیستم را می‌توان به میانگین وزنی کارایی‌های بخشی، تجزیه کرد که در این حالت، نشان می‌دهد که کارایی گزینه محاسبه‌شده از داده‌های جمع‌شده، برابر با جمع کارایی‌های کارشناس است. این نتیجه، مطلوب است زیرا جمع نظرات کارشناس‌ها در سطح داده‌ها، منجر به نتیجه مشابه با جمع نظرات کارشناس‌ها در سطح کارایی است. بنابراین نتایج برای رتبه‌بندی گزینه‌ها، متقاعدکننده و قابل قبول هستند. تجزیه کارایی گزینه به کارایی‌های کارشناس، برای هر دو مدل شعاعی و SBM معتبر است. با این حال، کارایی شعاعی، تحت تأثیر مقدار تخصیص داده‌شده به عدد غیرارشمیدسی برای آن دسته از DMUهایی است که در خارج از مخروط ایجادشده توسط پوسته محدبی قرار دارد که از DMUهای بسیار کارا ساخته شده است. در مقابل، کارایی SBM، تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد و برای رتبه‌بندی گزینه‌ها، قابل اعتمادتر است. یک حالت از انتخاب ربات برای یک شرکت تولیدی پیشرو در صنعت دوربین مدار بسته در تایوان، برای نشان دادن مفهوم ارائه‌شده در این مقاله، استفاده شده است. نتایج حاصل تأیید می‌کنند که مدل شعاعی در واقع، کارایی غیرقابل‌اعتمادی را تولید می‌کند. بنابراین مدل SBM برای استفاده در تصمیم‌گیری گروهی در DEA توصیه می‌شود.

## ۶- مراجع

- Adler, N. , Friedman, L. , & Sinuany-Stern, Z. (2002). Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. *European Journal of Operational Research*, 140 , 249–265.
- Aldamak, A. , & Zolfaghari, S. (2017). Review of efficiency ranking methods in data envelopment analysis. *Measurement*, 1106 , 161–172.
- Angiz, M. Z. , Emrouznejad, A. , Mustafa, A. , & Komijan, A. R. (2009). Selecting the most preferable alternatives in a group decision making problem using DEA. *Expert Systems with Applications*, 36 , 9599–9602 .
- Banker, R. D. , Charnes, A. , & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30 , 1078–1092 .
- Braglia, M. , & Petroni, A. (1999). Evaluating and selecting investments in industrial robots. *International Journal of Production Research*, 37 , 4178–4157.
- Charnes, A. , & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9 , 181–186 .
- Charnes, A. , & Cooper, W. W. (1984). The non-Archimedean CCR ratio for efficiency analysis: A rejoinder to Boyd and Färe.



- European Journal of Operational Research, 15 , 333–334 .
- Charnes, A. , Cooper, W. W. , & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2 , 429–444 .
- Charnes, A. , Cooper, W. W. , & Rhodes, E. (1979). Short communication: Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 3 , 339 .
- Du, J. , Liang, L. , & Zhu, J. (2010). A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis: A comment. European Journal of Operational Research, 204 , 694–697 .
- Ebrahimnejad, A. , Tavana, M. , & Santos-Arteaga, F. J. (2016). An integrated data envelopment analysis and simulation method for group consensus ranking. Mathematics and Computers in Simulation, 119 , 1–17 .
- Greco, S. , Ishizaka, A. , Tasiou, M. , & Torrisi, G. (2019). On the methodological framework of composite indices: A review of the issues of weighting, aggregation, and robustness. Social Indicators Research, 141 , 61–94 .
- Grošelj, P. , Malovrh, Š. P. , & Stirn, L. Z. (2011). Methods based on data envelopment analysis for deriving group priorities in analytic hierarchy process. Central European Journal of Operations Research, 19 , 267–284 .
- Hosseinian, S. S. , Navidi, H. , & Hajfathaliha, A. (2012). A new linear programming method for weights generation and group decision making in the analytic hierarchy process. Group Decision and Negotiation, 21 , 233–254 .
- Hosseinzadeh Lotfi, F. , Jahanshahloo, G. R. , Khodabakhshi, M. , Rostamy-Malkhlifeh, M. , Moghaddas, Z. , & Vaez-Ghasemi, M. (2013). A review of ranking models in data envelopment analysis. Journal of Applied Mathematics, 2013 , Article 492421 Article IDpages .
- Kao, C. (2009). Efficiency measurement for parallel production systems. European Journal of Operational Research, 196 , 1107–1112 .
- Kao, C. (2014). Network data envelopment analysis: A review. European Journal of Operational Research, 239 , 1–16 .
- Kao, C. (2017). Network data envelopment analysis: Foundations and extensions . Switzerland: Springer International Publishing.
- Kao, C. , Pang, R. Z. , Liu, S. T. , & Bai, X. J. (2021). Optimal expansion paths for hospitals of different types: Viewpoint of scope economies and evidence from Chinese hospitals. European Journal of Operational Research, 289 , 628–638 .
- Karsak, E. E. , & Ahiska, S. S. (2005). Practical common weight multi-criteria decision-making approach with an improved discriminating power for technology selection. International Journal of Production Research, 43 , 1537–1554 .
- Liu, J. , Fang, S. C. , & Chen, H. (2020). Multiplicative data envelopment analysis cross-efficiency and stochastic weight space acceptability analysis for group decision making with interval multiplicative preference relations. Information Sciences, 514 , 319–332 .
- Liu, J. , Song, J. , Xu, Q. , Tao, Z. , & Chen, H. (2019). Group decision making based on DEA cross-efficiency with intuitionistic fuzzy preference relations. Fuzzy Optimization and Decision Making, 18 , 345–370 .
- Liu, J. S. , Lu, L. Y. Y. , Lu, W. M. , & Lin, B. J. Y. (2013). A survey of DEA applications. Omega, 41 , 893–902 .
- Saaty, T. L. , & Vargas, L. G. (2001). Models, methods, concepts & applications of the analytic hierarchy process . Boston: Kluwer Academic Publishers .
- Talluri, S. , & Yoon, K. P. (2000). A cone-ratio DEA approach for AMT justification. International Journal of Production Economics, 66 , 119–129 .
- Tang, M. , & Liao, H. (2021). From conventional group decision making to large-scale group decision making: What are the challenges and how to meet them in big data era? A state-of-the-art survey. Omega, 100 Article ID 102141, 18 pages .
- Tavana, M. , Khalili-Damghani, K. , & Sadi-Nezhad, S. (2013). A fuzzy group data envelopment analysis model for high-technology project selection: A case study at NASA. Computers & Industrial Engineering, 66 , 10–23 .
- Thompson, R. G. , Singleton, F. D., Jr. , Thrall, R. M. , & Smith, B. A. (1986). Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab. Texas. Interfaces, 16 (6), 35–49 .
- Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 130 , 498–509 .
- Tone, K. , Toloo, M. , & Izadikhah, M. (2020). A modified slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 287 , 560–571 .
- Wang, Y. M. , & Chin, K. S. (2009a). A new data envelopment analysis method for priority determination and group decision making in the analytic hierarchy process. European Journal of Operational Research, 195 , 239–250.
- Wang, Y. M. , & Chin, K. S. (2009b). A new approach for the selection of advanced manufacturing technologies: DEA with double frontiers. International Journal of Production Research, 47 , 6663–6679.

## Group Decision-Making in Data Envelopment Analysis

**Golestan Zadahmad Jafarlu<sup>1</sup>**

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,  
Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

**Hossein Azizi**

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,  
Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

**Shahruz Fathi Ajirlu**

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

### Abstract

Data Envelopment Analysis (DEA) is a technique widely used to measure the relative efficiency of a set of decision-making units and rank options based on the measured efficiency. When there is a need for data estimation, consultation with a group of experts is sought. However, the results may not be consistent, leading to a complex situation that needs to be addressed. In this article, a method is proposed to determine appropriate weights through which expert opinions can be used for calculating the efficiency of options. Based on this idea, a radial model and a Slack-Based Measure (SBM) model are proposed.

**Keywords:** Data envelopment analysis, group decision-making, parallel systems, radial efficiency, Slack-Based Measure of efficiency.

---

<sup>1</sup>Corresponding Author