نرمال‌سازی وزن‌های بازه‌ای و فازی

رسول جاهد
گروه ریاضی، واحد گرمی، دانشگاه آزاد اسلامی، گرمی، ایران

چکیده

در تحلیل تصمیم چندشاخصی در شرایط عدم اطمینان خصوصاً در فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی با قضاوت‌های بازه‌ای یا فازی، نرمال‌سازی وزن‌های بازه‌ای و فازی مورد نیاز است. روش‌های کنونی نرمال‌سازی بر اساس حساب بازه‌ای و حساب فازی دچار اشکال هستند و نیاز به اصلاح دارند. این مقاله روش‌های صحیح نرمال‌سازی برای وزن‌های بازه‌ای را ارائه می‌کند و قضیه‌هایی را در پشتیبانی آن‌ها بیان می‌نماید. یک مثال عددی بررسی می‌شود تا درستی روش‌های نرمال‌سازی پیشنهادی و تفاوت آن‌ها با روش‌های نرمال‌سازی موجود نشان داده شود.

کلیدواژه‌ها: وزن‌های بازه‌ای؛ تصمیم‌گیری چندشاخصی؛ نرمال‌سازی.

۱- مقدمه

غالباً در تحلیل تصمیم چندشاخصی (MCDA) در شرایط عدم اطمینان، وزن‌های بازه‌ای و فازی باید نرمال‌سازی شوند. مثلاً زمانی که از فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی (AHP) فازی برای مدل‌سازی عدم اطمینان و ابهام استفاده می‌شود، تا یک بردار وزن یکتا از یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی بازه‌ای یا فازی ایجاد شود، بردار وزن باید نرمال‌سازی شود [۲،۳،۲۴،۲۶]؛ در غیر این صورت، تعداد بی‌نهایتی بردار وزن وجود خواهند داشت که می‌توان از یک ماتریس مقایسه‌ی دو به دوی بازه‌ای یا فازی به دست آورد، که سبب می‌شود این وزن‌ها غیرقابل مقایسه باشند و همچنین، تجمیع وزن‌های بازه‌ای یا فازی محلی را در یک ساختار سلسله‌مراتبی به صورت یک بردار بازه‌ای یا فازی سراسری غیرممکن می‌کند. اگر برای برخی از شاخص‌ها، مقادیر آنها نامعین باشد و با داده‌های بازه‌ای یا فازی مشخص شود، نرمال‌سازی برای حذف ابعاد آنها نیز مورد نیاز است. به علاوه، وزن‌های بازه‌ای یا فازی نرمال‌سازی شده محاسبه‌ی متوسط وزنی فازی را نیز تسهیل می‌کنند [۷،۱۱،۱۲،۱۴،۱۶]. در نظریه‌ی شواهد Dempster-Shafer، شواهد نادقیق، مانند ساختارهای باور بازه‌ای یا فازی [۱،۶،۲۵] نیز باید نرمال‌سازی شود. بنابراین، روش‌های صحیح نرمال‌سازی مطلقاً مورد نیاز است. روش‌های شایع نرمال‌سازی به ترتیب مبتنی بر حساب بازه‌ای و حساب فازی هستند. در این مقاله، نادرستی آنها را ثابت خواهیم کرد و روش‌های درست نرمال‌سازی را ارائه خواهیم کرد.

این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در قسمت ۲، به اختصار روش‌های موجود نرمال‌سازی را برای وزن‌های بازه‌ای بررسی می‌کنیم. سپس نادرستی آنها را ثابت کرده و روش‌های صحیح نرمال‌سازی و قضیه‌های مربوطه را برای وزن‌های بازه‌ای در قسمت ۳ ارائه می‌کنیم. مثال عددی در قسمت ۴ ارائه می‌شود، تا درست روش‌های نرمال‌سازی پیشنهادی و تفاوت آنها با روش‌های موجود را نشان دهد. نتیجه‌گیری مقاله در قسمت ۵ ارائه می‌شود.

۲- رویکردهای موجود نرمال‌سازی برای وزن‌های بازه‌ای

روش‌های متداول نرمال‌سازی برای وزن‌های بازه‌ای و فازی به ترتیب مبتنی بر حساب‌های بازه‌ای و فازی هستند. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای نمونه‌هایی از آن به [۲،۳،۴،۵،۱۰،۱۵،۱۷،۲۲،۲۳،۲۶] مراجعه کنند. فرض کنید $a=[a_1,a_2]$ و $b=[b_1,b_2]$ دو عدد بازه‌ای مثبت باشند. حساب بازه‌ای را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

جمع: $a+b=[a_1+b_1,a_2+b_2]$

تفریق: $a-b=[a_1-b_2,a_2-b_1]$

ضرب: $a\times b=[a_1b_1,a_2b_2]$

تقسیم: $a\div b=[\frac{a_1}{b_2},\frac{a_2}{b_1}]$

فرض کنید $w_i=[w_i^L,w_i^U]$ و $\hat{w}_i=[\hat{w}_i^L,\hat{w}_i^U]$ ($i=1,\ldots,n$) به ترتیب وزن‌های بازه‌ای نرمال‌سازی نشده و نرمال‌سازی شده باشند. روش‌های موجود نرمال‌سازی مبتنی بر حساب بازه‌ای، وزن‌های بازه‌ای w_i ($i=1,\ldots,n$) را بر اساس معادلات زیر نرمال‌سازی می‌کند [۲۶]:

$$\hat{w}_i=\left[\frac{w_i^L}{\sum_{j=1}^n w_j^U},\frac{w_i^U}{\sum_{j=1}^n w_j^L}\right]=[\hat{w}_i^L,\hat{w}_i^U]\quad i=1,\ldots,n \tag{۱}$$

که در اینجا داریم:

$$\hat{w}_i^L=\frac{w_i^L}{\sum_{j=1}^n w_j^U}\quad i=1,\ldots,n \tag{۲}$$

$$\hat{w}_i^U=\frac{w_i^U}{\sum_{j=1}^n w_j^L}\quad i=1,\ldots,n \tag{۳}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که کران‌های پایین و بالای $\hat{w}_i$ ($i=1,\ldots,n$) تعیین شده توسط معادلات (۲) و (۳) قابل حصول نیست. این را در قسمت بعد نشان می‌دهیم.

علاوه بر روش نرمال‌سازی فوق که مبتنی بر حساب بازه‌ای است، Jiménez و همکاران [۱۳] یک رویکرد نرمال‌سازی را برای وزن‌های بازه‌ای معرفی کردند که مبتنی بر معادلات زیر است:

$$k_i = \frac{w_i^L + w_i^U}{\sum_{j=1}^{n}(w_j^L + w_j^U)} \quad i=1,\ldots,n \tag{۴}$$

$$k_i^L = \frac{k_i w_i^L}{(w_i^L + w_i^U)/2} \quad i=1,\ldots,n \tag{۵}$$

$$k_i^U = \frac{k_i w_i^U}{(w_i^L + w_i^U)/2} \quad i=1,\ldots,n \tag{۶}$$

که در اینجا k_i^L و k_i^U بازه‌ی وزن نرمال‌سازی شده را تشکیل می‌دهند که به صورت $[k_i^L, k_i^U]$ ($i=1,\ldots,n$) نمایش داده می‌شود. به آسانی می‌توان دید که معادلات (۴) تا (۶) روش نرمال‌سازی مبتنی بر نقطه‌ی وسط وزن‌های بازه‌ای هستند. علت این امر عبارت است از:

$$k_i = \frac{(w_i^L + w_i^U)/2}{\sum_{j=1}^{n}(w_j^L + w_j^U)/2} \quad i=1,\ldots,n \tag{۷}$$

$$k_i^L = \frac{w_i^L}{\sum_{j=1}^{n}(w_j^L + w_j^U)/2} \quad i=1,\ldots,n \tag{۸}$$

$$k_i^U = \frac{w_i^U}{\sum_{j=1}^{n}(w_j^L + w_j^U)/2} \quad i=1,\ldots,n \tag{۹}$$

همچنین، می‌توان دید که

$$\sum_{i=1}^{n}(k_i^L + k_i^U) \equiv 2 \tag{۱۰}$$

یک چنین معادله‌ی اتحادی به صورت ذهنی تحمیل می‌شود. منطق آن را به آسانی نمی‌توان توجیه کرد.

در قسمت بعد نشان می‌دهیم که هیچ شواهدی برای حمایت از چنین فرضی در مورد وزن‌های بازه‌ای وجود ندارد.

۳- روش‌های درست نرمال‌سازی برای وزن‌های بازه‌ای

۳-۱- تعریف و قضاوت نرمال‌سازی

فرض کنید $w_i = [w_i^L, w_i^U]$ مجموعه‌ای از وزن‌های بازه‌ای باشد با $0 \le w_i^L \le w_i^U$ ($i=1,\ldots,n$) و $N = \{X = (x_1,\ldots,x_n) \mid w_i^L \le x_i \le w_i^U, i=1,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ مجموعه‌ای از بردارهای وزن نرمال‌سازی شده باشد، که بر اساس آن، تعریف زیر را برای نرمال‌سازی وزن‌های بازه‌ای داریم:

تعریف ۱: گفته می‌شود که یک بردار وزن بازه‌ای $W = (w_1,\ldots,w_n)$ با $w_i = [w_i^L, w_i^U]$ و $0 \le w_i^L \le w_i^U$ ($i=1,\ldots,n$) نرمال‌سازی شده است، اگر و تنها اگر در دو شرط زیر صدق کند:

(۱) لااقل یک بردار وزن نرمال‌سازی شده‌ی $X = (x_1,\ldots,x_n) \in N$ وجود دارد.

(۲) w_i^L و w_i^U ($i=1,\ldots,n$) همگی در N قابل حصول هستند.

شرط (۱) نشان می‌دهد که N مجموعه‌ای ناتهی از بردارهای وزن نرمال‌سازی شده است، و امکان تأمین آن وجود دارد، اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^{n} w_i^L \le 1$ و $\sum_{i=1}^{n} w_i^U \ge 1$. در صورت نقض، N یک مجموعه‌ی تهی است. شرط (۲) بدان معنا است که هر کران w_i برای لااقل یک بردار در N حاصل می‌شود.

برای یک بردار وزن بازه‌ای داده شده، قضیه‌ی زیر مشخص می‌کند که آیا نرمال‌سازی شده است یا خیر.

قضیه‌ی ۱: اگر یک بردار وزن بازه‌ای $W=(w_1,\ldots,w_n)$ با $w_i=[w_i^L,w_i^U]$ و $0\le w_i^L \le w_i^U$ برای $i=1,\ldots,n$ در شروط زیر صدق کند:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^L + \max_j (w_j^U - w_j^L) \le 1 \qquad (۱۱)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^U - \max_j (w_j^U - w_j^L) \ge 1 \qquad (۱۲)$$

آنگاه نرمال‌سازی شده است [۱۹–۲۱]؛ در غیر این صورت، نرمال‌سازی شده نیست.

اثبات: رک. [۱۸].

اگر یک بردار وزن بازه‌ای بر اساس قضیه‌ی ۱ نرمال‌سازی شده نباشد، آنگاه یا شرط (۱) یا شرط (۲) را نقض می‌کند. اگر شرط (۱) را نقض کند، آنگاه شرط (۲) را نیز نقض می‌کند، چون N در این حالت، یک مجموعه‌ی تهی است. اما عکس آن ممکن است درست نباشد.

۳-۲- روش نرمال‌سازی برای وزن‌های بازه‌ای با نقض شرط (۱)

برای یک بردار وزن بازه‌ای داده شده شرط (۱) را نقض می‌کند، مدل زیر را برای $i=1,\ldots,n$ به ترتیب در نظر می‌گیریم:

$$\text{Min/Max} \quad \hat{w}_i = z_i / \sum_{j=1}^{n} z_j \qquad (۱۳)$$
$$\text{S.t.} \; w_j^L \le z_j \le w_j^U \quad j=1,\ldots,n$$

مدل یک بازه‌ی وزنی $[\hat{w}_i^L,\hat{w}_i^U]$ برای هر $\hat{w}_i$ ایجاد می‌کند، که در اینجا $\hat{w}_i^L = \text{Min}\,\hat{w}_i$ و $\hat{w}_i^U = \text{Max}\,\hat{w}_i$.

مشتق‌های جزئی $\hat{w}_i$ نسبت به هر متغیر وزنی z_j ($j=1,\ldots,n$) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial \hat{w}_i}{\partial z_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j - z_i}{(\sum_{j=1}^{n} z_j)^2} = \frac{\sum_{j\ne i}^{n} z_j}{(\sum_{j=1}^{n} z_j)^2} > 0$$

$$\frac{\partial \hat{w}_i}{\partial z_j} = \frac{-z_i}{(\sum_{j=1}^{n} z_j)^2} < 0 \quad j=1,\ldots,n; j\ne i$$

بدیهی است که $\hat{w}_i$ یک تابع صعودی از z_i است، ولی با z_j ($j=1,\ldots,n; j\ne i$) کاهش می‌یابد. بنا بر این، کمینه و بیشینه‌ی آن را می‌توان با معادلات زیر مشخص کرد:

$$\hat{w}_i^L = \hat{w}_i^{\min} = \frac{w_i^L}{w_i^L + \sum_{j\ne i}^{n} w_j^U} \quad i=1,\ldots,n \qquad (۱۴)$$

$$\hat{w}_i^U = \hat{w}_i^{\max} = \frac{w_i^U}{w_i^U + \sum_{j\ne i}^{n} w_j^L} \quad i=1,\ldots,n \qquad (۱۵)$$

این دو معادله نخستین بار توسط Dubois و Prade [۹] ابداع شدند. در باره‌ی این دو معادله، دو قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه‌ی ۲: فرض کنید $\hat{w}_i=[\hat{w}_i^L,\hat{w}_i^U]$ ($i=1,\ldots,n$) وزن‌های بازه‌ای تعیین شده توسط معادلات (۱۴) و (۱۵) باشد. آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{w}_i^L + \max_j (\hat{w}_j^U - \hat{w}_j^L) \le 1 \qquad (۱۶)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i^U - \max_j(\hat{w}_j^U - \hat{w}_j^L) \geq 1 \qquad (۱۷)$$

اثبات: رک. [۱۸].

قضیه‌ی ۳: اگر $\hat{w}_i = [\hat{w}_i^L, \hat{w}_i^U]$ $(i = 1,\ldots,n)$ وزن‌های بهینه‌ی تعیین شده توسط معادلات (۱۴) و (۱۵) باشد، آنگاه

$$\hat{w}_i^L = \max\left\{\hat{w}_i^L, 1 - \sum_{j\neq i}\hat{w}_j^U\right\} \quad i = 1,\ldots,n \qquad (۱۸)$$

$$\hat{w}_i^U = \min\left(\hat{w}_i^U, 1 - \sum_{j\neq i}\hat{w}_j^L\right) \quad i = 1,\ldots,n \qquad (۱۹)$$

اثبات: رک. [۱۸].

قضیه‌های ۱ تا ۳ نشان می‌دهند که معادلات (۱۴) و (۱۵) مجموعه‌ای از وزن‌های بازه‌ای نرمال‌سازی شده را ایجاد می‌کنند. بنا بر این، آنها فرمول‌های صحیح نرمال‌سازی برای وزن‌های بازه‌ای در موارد نقض شرط (۱) هستند. اما به علت این واقعیت که

$$\frac{w_i^L}{\sum_{j=1}^{n} w_j^U} < \frac{w_i^L}{w_i^L + \sum_{j\neq i}^{n} w_j^U} \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\frac{w_i^U}{\sum_{j=1}^{n} w_j^L} > \frac{w_i^U}{w_i^U + \sum_{j\neq i}^{n} w_j^L} \quad i = 1,\ldots,n$$

به آسانی می‌توان در یافت که کران‌های پایین و بالای $\hat{w}_i (i = 1,\ldots,n)$ تعیین شده توسط معادلات (۲) و (۳) قابل حصول نیستند و بنا بر این، نمی‌توانند درست باشند. باید آنها را با معادلات (۱۴) و (۱۵) جایگزین کرد، که بازه‌های وزنی تنگ‌تری را ایجاد می‌کنند، و بنا بر این، عدم اطمینان را کاهش می‌دهند. مثلاً وزن‌های بازه‌ای زیر را در نظر بگیرید: $w_1 = [0.3, 0.4]$، $w_2 = [0.3, 0.7]$، $w_3 = [0.4, 0.5]$، و $w_4 = [0.5, 0.6]$. پس از نرمال‌سازی با معادلات (۲) و (۳)، داریم $\hat{w}_1 = [0.1364, 0.2667]$، $\hat{w}_2 = [0.1364, 0.4667]$، $\hat{w}_3 = [0.1818, 0.3333]$، و $\hat{w}_4 = [0.2273, 0.4]$. می‌توان تحقیق کرد که $\sum_{i=1}^{4}\hat{w}_i^L + \max_j\{\hat{w}_j^U - \hat{w}_j^L\} = 1.0121 > 1$، که نامعادله‌ی (۱۶) را نقض می‌کند. وزن‌های بازه‌ای نرمال‌سازی شده‌ی صحیح باید به صورت $\hat{w}_1 = [0.1429, 0.25]$، $\hat{w}_2 = [0.1667, 0.3684]$، $\hat{w}_3 = [0.1905, 0.3125]$، و $\hat{w}_4 = [0.2381, 0.3750]$ باشد، که باریک‌تر از موارد به دست آمده از معادله‌های (۱) تا (۳) هستند.

به علاوه، معادله‌های (۱) تا (۳) ممکن است لزوماً قادر به تولید وزن‌هایی نباشند که در معادلات (۱۸) و (۱۹) صدق کنند. دوباره مثال فوق را در نظر بگیرید. برای $\hat{w}_1 = [0.1364, 0.2667]$، $\hat{w}_2 = [0.1364, 0.4667]$، $\hat{w}_3 = [0.1818, 0.3333]$، و همچنین، $\hat{w}_4 = [0.2273, 0.4]$، که از معادلات (۱) تا (۳) به دست می‌آیند، به آسانی می‌توان دید که $\hat{w}_2^U > \min\{\hat{w}_2^U, 1 - \sum_{j\neq 2}\hat{w}_j^L\}$، که معادله‌ی (۱۹) را نقض می‌کند.

برای هر بردار وزنی بازه‌ای نرمال‌سازی شده‌ی تعیین شده توسط معادلات (۱۴) و (۱۵)، هیچ شواهدی وجود ندارد که معرف $(\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i^L)(\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i^U) = 1$ یا $\sum_{i=1}^{n}(\hat{w}_i^L + \hat{w}_i^U) = 2$ باشد. به عبارت دیگر،

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i^L\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i^U\right) \overset{\text{usually}}{\neq} 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{w}_i^L + \hat{w}_i^U) \overset{\text{usually}}{\neq} 2$$

مثلاً وزن‌های نرمال‌سازی شده‌ی فوق را در نظر بگیرید: $\hat{w}_1=[0.1429,0.25]$، $\hat{w}_2=[0.1667,0.3684]$، $\hat{w}_3=[0.1905,0.3125]$، و $\hat{w}_4=[0.2381,0.3750]$، که از معادلات (۱۴) و (۱۵) به دست آمده‌اند. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $(\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i^L)(\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i^U)=0.9639\neq 1$ و $\sum_{i=1}^{n}(\hat{w}_i^L+\hat{w}_i^U)=2.044\neq 2$.

۳-۳- روش نرمال‌سازی برای وزن‌های بازه‌ای با نقض شرط (۲)

اگر یک بردار وزنی بازه‌ای داده شده شرط (۲) را نقض کند، در حالی که شرط (۱) تأمین می‌شود، آنگاه نرمال‌سازی را می‌توان به دو روش متفاوت انجام داد. یک راه از طریق معادلات (۱۴) و (۱۵) است، و روش دیگر، با حل کردن مدل زیر برای هر $i=1,\dots,n$ است:

$$\text{Min/Max } \hat{w}_i \qquad (۲۰)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} w_j^L\le \hat{w}_j\le w_j^U & j=1,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n}\hat{w}_j=1 \end{cases}$$

این مدل حالت خاصی از مدل توزیع امکان پیشنهاد شده توسط Dubois و Prade [۸] است، که توزیع امکان $\sum_{i=1}^{n}r_ix_i$ را تحت قید تعاملی $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ بررسی کردند، که در آن $x_i=(m_i,\alpha_i,\beta_i)$ ($i=1,\dots,n$) اعضای فازی LL هستند.

تنها تفاوت بین مدل‌های (۱۳) و (۲۰)، آن است که اولی هیچ محدودیتی در مورد متغیرهای وزن z_j ($j=1,\dots,n$) ندارد، در حالی که دومی نیازمند آن است که مجموع آنها یک باشد. بنا بر این، اگر وزن‌های بازه‌ای داده شده از یکدیگر مستقل باشند، آنگاه باید از معادلات (۱۴) و (۱۵) استفاده کرد. ولی اگر به هم وابسته باشند و دارای محدودیت $\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i=1$ با $w_i^L\le\hat{w}_i\le w_i^U$ ($i=1,\dots,n$) باشند، آنگاه باید از مدل (۲۰) برای نرمال‌سازی استفاده کرد.

از آنجا که شرط (۲) در مدل (۲۰) مستتر است، این مدل همیشه یک بازه‌ی وزنی نرمال‌سازی شده‌ی $[\hat{w}_i^L,\hat{w}_i^U]$ برای هر $\hat{w}_i$ ایجاد می‌کند، که در اینجا $\hat{w}_i^L$ و $\hat{w}_i^U$ به ترتیب کمینه و بیشینه‌ی آن هستند. در باره‌ی جواب‌های این مدل، لم‌ها و قضیه‌های زیر را داریم.

لم ۱: مقدار کمینه و بیشینه‌ی مدل (۲۰) از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{w}_i^L=\max\left\{w_i^L,1-\sum_{j\neq i}w_j^U\right\} \quad i=1,\dots,n \qquad (۲۱)$$

$$\hat{w}_i^U=\min\left\{w_i^U,1-\sum_{j\neq i}w_j^L\right\} \quad i=1,\dots,n \qquad (۲۲)$$

اثبات: رک. [۱۸].

لم ۲: فرض کنید $\hat{w}_i=[\hat{w}_i^L,\hat{w}_i^U]$ ($i=1,\dots,n$) وزن‌های بازه‌ای حاصل از معادلات (۲۱) و (۲۲) باشد. آنگاه فقط یک بازه‌ی $\hat{w}_k=[\hat{w}_k^L,\hat{w}_k^U]$ ($k\in\{1,\dots,n\}$) وجود دارد که با بازه‌ی اصلی $w_k=[w_k^L,w_k^U]$ متفاوت است، در حالی که بقیه بدون
تغییر می‌مانند.

اثبات: رک. [۱۸].

دقت کنید که لم ۲ به معنای آن نیست که w_k^L و w_k^U را باید هر دو همزمان تعدیل کرد. یکی از آنها را می‌توان بدون تغییر باقی گذاشت، ولی لااقل یکی از آنها را باید تعدیل کرد.

قضیه‌ی ۴: اگر یک بردار وزن بازه‌ای $W=(w_1,\dots,w_n)$ با $w_i=[w_i^L,w_i^U]$ و $w_i^L\le w_i^U$ برای $i=1,\dots,n$ در شرایط زیر صدق کند

$$w_i^L = \max\left\{ w_i^L, 1 - \sum_{j \neq i} w_j^U \right\} \quad i = 1, \ldots, n \tag{۲۳}$$

$$w_i^U = \min\left\{ w_i^U, 1 - \sum_{j \neq i} w_j^L \right\} \quad i = 1, \ldots, n \tag{۲۴}$$

آنگاه نرمال‌سازی شده است.

اثبات: رک. [۱۸].

قضیه‌ی ۵: فرض کنید $\hat{w}_i = [\hat{w}_i^L, \hat{w}_i^U]$ ($i = 1, \ldots, n$) وزن‌های بازه‌ای تعیین شده بر اساس معادلات (۲۱) و (۲۲) باشند. آنگاه

$$\hat{w}_i^L = \max\left\{ \hat{w}_i^L, 1 - \sum_{j \neq i} \hat{w}_j^U \right\} \quad i = 1, \ldots, n \tag{۲۵}$$

$$\hat{w}_i^U = \min\left\{ \hat{w}_i^U, 1 - \sum_{j \neq i} \hat{w}_j^L \right\} \quad i = 1, \ldots, n \tag{۲۶}$$

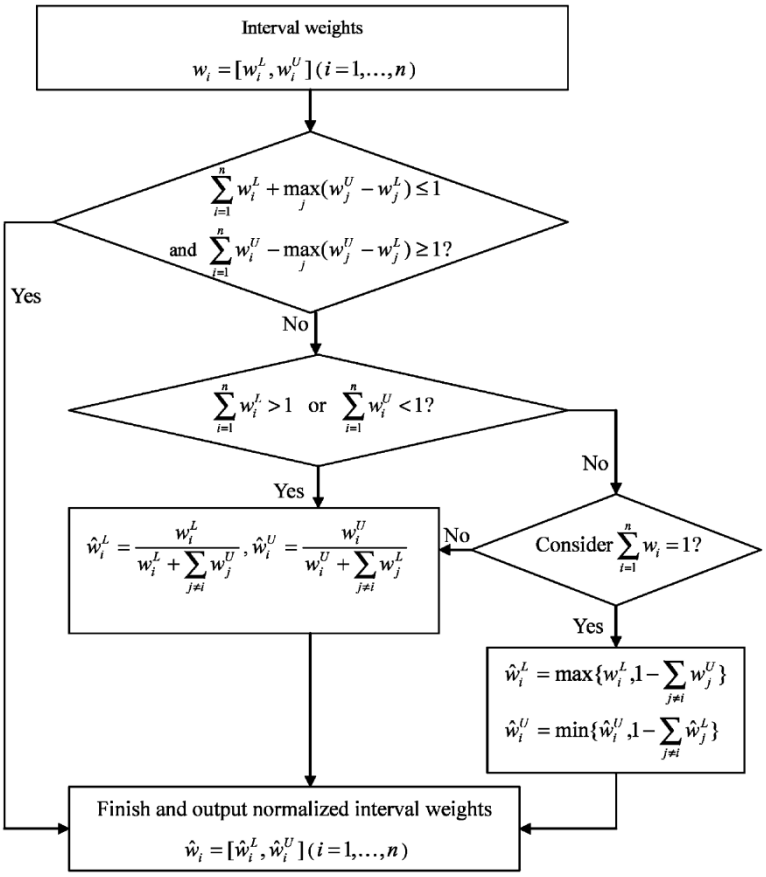
اثبات: رک. [۱۸].

قضیه‌ی ۶: فرض کنید $\hat{w}_{i1} = [\hat{w}_{i1}^L, \hat{w}_{i1}^U] (i = 1, \ldots, n)$ وزن‌های بازه‌ای نرمال‌سازی شده‌ی تعیین شده بر اساس معادلات (۱۴) و (۱۵) باشد، و $\hat{w}_{i2} = [\hat{w}_{i2}^L, \hat{w}_{i2}^U] (i = 1, \ldots, n)$ وزن‌های بازه‌ای نرمال‌سازی شده‌ی تعیین شده بر اساس معادلات (۲۱) و (۲۲) باشد. آنگاه $w_{i1}^L \leq w_{i2}^L$ و $w_{i1}^U \geq w_{i2}^U$ برای $i = 1, \ldots, n$، یعنی $\hat{w}_{i1} \supseteq \hat{w}_{i2}$ که در اینجا نماد $\supseteq$ یعنی «شامل است».

اثبات: رک. [۱۸].

قضیه‌های ۴ و ۵ به روشنی نشان می‌دهند که وزن‌های بازه‌ای تعیین شده با معادلات (۲۱) و (۲۲) همیشه نرمال‌سازی شده هستند. قضیه‌ی ۶ نشان می‌دهد که روش نرمال‌سازی تعریف شده بر اساس معادلات (۲۱) و (۲۲) بازه‌های وزنی باریک‌تری نسبت به روش ارائه شده در معادله‌های (۱۴) و (۱۵) ایجاد می‌کند.

به عنوان یک خلاصه، شکل ۱ فلوچارت انتخاب روش‌های نرمال‌سازی برای وزن‌های بازه‌ای را نشان می‌دهد



شکل ۱: نمودار نرمال‌سازی وزن‌های بازه‌ای.

٤- یک مثال عددی

در این قسمت، یک مثال عددی را بررسی می‌کنیم، تا درستی روش‌های نرمال‌سازی پیشنهادی و تفاوت آنها با روش‌های نرمال‌سازی موجود را نشان دهیم.

مثال ۱: وزن‌های بازه‌ای زیرا در نظر بگیرید:

$$w_1 = [0.1, 0.2], w_2 = [0.2, 0.3], w_3 = [0.3, 0.4],$$
$$w_4 = [0.4, 0.5], w_5 = [0.3, 0.5], w_6 = [0.2, 0.4]$$

به آسانی می‌توان دید که وزن‌های بازه‌ای فوق نرمال‌سازی شده نیستند، زیرا $\sum_{i=1}^{6} w_i^l + \max\ (w_j^U - w_j^L) = 1.6 \ge 1$. به علت این واقعیت که وزن‌های بازه‌ای فوق فقط در یکی از شرط‌های (۱) صدق می‌کنند، یعنی شرط $\sum_{i=1}^{6} w_i^U \ge 1$، بنا بر این، آنها را می‌توان با معادلات (۱۴) و (۱۵) نرمال‌سازی کرد. نتایج نرمال‌سازی به شرح زیر است:

$$\hat{w}_1 = [0.04545, 0.125], \hat{w}_2 = [0.0909, 0.1875], \hat{w}_3 = [0.1363, 0.25]$$
$$\hat{w}_4 = [0.1818, 0.3125], \hat{w}_5 = [0.1363, 0.2941], \hat{w}_6 = [0.0952, 0.2352]$$

٥- نتیجه‌گیری

نرمال‌سازی وزن‌های بازه‌ای و فازی نقش مهمی در مسایل MCDA با عدم اطمینان دارد، خصوصاً در AHP بازه‌ای یا فازی. بدون روش‌های درست نرمال‌سازی، ممکن است نتیجه‌گیری‌های تصمیم درستی وجود نداشته باشد. در این مقاله، ما مسئله‌ی نرمال‌سازی وزن‌های بازه‌ای را بررسی کردیم. نشان دادیم که روش‌های موجود نرمال‌سازی مبتنی بر حساب بازه‌ای نادرست هستند، و ممکن است به وزن‌های بازه‌ای غیرواقع‌گرایانه منتهی شوند. روش‌های درست نرمال‌سازی ارائه شدند. درستی و

فرآیند محاسبه‌ی روش‌های پیشنهادی نرمال‌سازی و تفاوت آنها با روش‌های نرمال‌سازی موجود با استفاده از یک مثال عددی نشان داده شد.

منابع

Bonder, C.G.E., de Graan, J.G., & Lootsma, F.A. (1989). Multi-criteria decision analysis with fuzzy pairwise comparisons. Fuzzy Sets and Systems, 29, 133–143.

Chang, P.T., & Lee, E.S. (1995). The estimation of normalized fuzzy weights. Computational Mathematics and Applications, 29(5), 21–42.

Deng, H. (1999). Multicriteria analysis with fuzzy pairwise comparison. International Journal of Approximate Reasoning, 21, 215–231.

Dong, W.M., & Wong, F.S. (1987). Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle. Fuzzy Sets and Systems, 21, 183–199.

Dubois, D., & Prade, H. (1981). Additions of interactive fuzzy numbers. IEEE Transactions on Automatic Control, 26(4), 926–936.

Dubois, D., & Prade, H. (1982). The use of fuzzy numbers in decision analysis. In M.M. Gupta & E. Sanchez (Eds.), Fuzzy Information and Decision Processes (pp. 309–321). North-Holland, Amsterdam.

Gogus, O., & Boucher, T.O. (1997). A consistency test for rational weights in multi-criterion decision analysis with fuzzy pairwise comparisons. Fuzzy Sets and Systems, 86, 129–138.

Guh, Y.Y., Hon, C.C., & Lee, E.S. (2001). Fuzzy weighted average: the linear programming approach via Charnes and Cooper's rule. Fuzzy Sets and Systems, 117, 157–160.

Guh, Y.Y., Hon, C.C., Wang, K.M., & Lee, E.S. (1996). Fuzzy weighted average: a max–min paired elimination method. Computational Mathematics and Applications, 32(8), 115–123.

Jiménez, A., Ríos-Insua, S., & Mateos, A. (2003). A decision support system for multiattribute utility evaluation based on imprecise assignments. Decision Support Systems, 36, 65–79.

Kao, C., & Liu, S.T. (2001). Fractional programming approach to fuzzy weighted average. Fuzzy Sets and Systems, 120, 435–444.

Kwiesielewicz, M. (1998). A note on the fuzzy extension of Saaty's priority theory. Fuzzy Sets and Systems, 95, 161–172.

Liou, T.S., & Wang, M.J. (1992). Fuzzy weighted average: An improved algorithm. Fuzzy Sets and Systems, 49, 307–315.

Mikhailov, L. (2003). Deriving priorities from fuzzy pairwise comparison judgments. Fuzzy Sets and Systems, 134, 365–385.

Wang, Y.M., & Elhagc, T.M.S. (2006). On the normalization of interval and fuzzy weights. Fuzzy Sets and Systems, 157, 2456–2471.

Sugihara, K., & Ishii, H. (2004). Interval priorities in Analytic Hierarchy Process (AHP) by interval regression analysis. European Journal of Operational Research, 158, 745–754.

Tanaka, H., & Sugihara, K. (2004). Non-additive measures by interval probability functions. Information Sciences, 164, 209–227.

Triantaphyllou, E., & Lin, C.T. (1996). Development and evaluation of five fuzzy multiattribute decision-making methods. International Journal of Approximate Reasoning, 14, 281–310.

Van Laarhoven, P.J.M., & Pedrycz, W. (1983). A fuzzy extension of Saaty's priority theory. Fuzzy Sets and Systems, 11, 229–241.

Wang, Y.M., Yang, J.B., & Xu, D.L. (2005). Interval weight generation approaches based on consistency test and interval comparison matrices. Applied Mathematics and Computation, 167, 252–273.

Wang, Y.M., Yang, J.B., Xu, D.L., & Chin, K.S. (2005). The evidential reasoning approach for multiple attribute decision making using interval belief degrees. European Journal of Operational Research, 159(3), 679-692.

Xu, R. (2000). Fuzzy least-squares priority method in the analytic hierarchy process. Fuzzy Sets and Systems, 112, 359–404.

Yager, R.R. (2001). Dempster-Shafer belief structures with interval-valued focal weights. International Journal of Intelligent Systems, 16, 497–512.

Normalization of interval and fuzzy weights

Rasul Jahed
Department of Applied Mathematics, Germi Branch, Islamic Azad University, Germi, Iran.

Abstract

In multi-criteria decision analysis, especially in the Analytic Hierarchy Process with interval or fuzzy judgments, normalization of interval and fuzzy weights is necessary. Current normalization methods based on interval and fuzzy arithmetic have limitations and require adjustments. This paper presents proper normalization methods for interval weights and discusses the issues supporting them. A numerical example is examined to demonstrate the correctness of the proposed normalization methods and their differences from existing normalization approaches.

Keywords: Interval weights; Multiple criteria decision making; Normalization