

حداکثر اندازه‌ی کارایی مبتنی بر اسلک در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای

شهرام عنایتی تکله

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

حسین عزیزی

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

شهرزاد فتحی اجیرلو

گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران

چکیده

مدل اندازه‌ی مبتنی بر اسلک (SBM)، کاربرد گسترده‌ای در اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUs) دارد زیرا کارایی اندازه‌گیری شده، تحت تأثیر مرزهای کارای ضعیف قرار نمی‌گیرد. این مدل به دنبال نقطه هدفی در مرز تولید است که ارزیابی آن در دورترین مکان از DMU صورت گرفته است تا کارایی را محاسبه کند و به تلاش بیشتری برای رسیدن به DMU نیاز دارد تا کارا شود. این مقاله، مدلی را به‌منظور محاسبه حداکثر کارایی SBM برای سیستم‌های تولید شبکه‌ای عمومی توسعه می‌دهد.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، سیستم شبکه‌ای، اندازه‌ی مبتنی بر اسلک.

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، تکنیکی است که برای اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) استفاده می‌شود و از ورودی‌های متعدد برای تولید خروجی‌های متعدد استفاده می‌کند (Charnes et al., 1978). مدل پیشگام DEA به چارنز و همکاران نسبت داده می‌شود که معمولاً به عنوان مدل چارنز، کوپر و رودز (CCR) شناخته می‌شود و یک فناوری با بازده به مقیاس ثابت (CRS) را در نظر می‌گیرد. بنکر و همکاران فرض CRS را تسهیل کردند تا مدلی را پیشنهاد دهند که حالت بازده به مقیاس متغیر (VRS) را فراهم کند (Banker et al., 1984). این مدل معمولاً به عنوان مدل بنکر، چارنز و کوپر (BCC) شناخته می‌شود. این دو مدل، دارای دو شکل ورودی و خروجی هستند که شکل ورودی، بیشترین میزان کاهش تمام ورودی‌ها در نرخ یکسان و در عین حال، حفظ خروجی‌ها در سطوح فعلی را محاسبه می‌کند و شکل خروجی، بیشترین میزان افزایش تمام خروجی‌ها در نرخ یکسان و در عین حال، حفظ ورودی‌ها در سطوح فعلی را محاسبه می‌کند. ویژگی نرخ یکسان، این دو مدل را به عنوان مدل‌های شعاعی، طبقه‌بندی می‌کند.

در زمانی که یک مدل شعاعی برای اندازه‌گیری کارایی یک DMU به کار می‌رود و در صورتی که اسلک، ظاهر شود، با اختصاص مقادیر مختلف به اسلک‌ها، کارایی‌های متفاوتی به دست می‌آید که ممکن است رتبه DMUهای ناکارا را تغییر دهد. یکی از راهکارهای این مشکل، استفاده از مدل‌های غیرشعاعی مانند مدل جمعی (Charnes et al., 1985)، مدل اندازه با محدوده تنظیم‌شده (RAM) (Cooper et al., 1999)، اندازه تابع فاصله جهت‌دار (Chambers et al., 1996) و مدل اندازه مبتنی بر اسلک (SBM) (SBM) (pastor et al., 1999; Tone, 2001) است. در مدل‌های غیرشعاعی متداول، به دنبال کارایی‌های حداقل هستیم. این امر به دلیل رابطه اولیه-دوگان میان مدل مضربی و مدل پوششی رخ می‌دهد، که یکی دارای شکل حداکثرسازی تابع هدف و دیگری دارای شکل حداقل‌سازی تابع هدف است که مدل‌های غیرشعاعی، براساس آنها توسعه می‌یابند. حداقل کارایی، در عمل بدین معنا است که هدف واقع در مرز تولید، دورترین فاصله را با DMU ارزیابی‌شده دارد. فاصله طولانی‌تر نشان می‌دهد که برای کارا شدن DMU ارزیابی‌شده، به تلاش بیشتری نیاز است. از این دیدگاه، هدفی که به DMU ارزیابی‌شده، نزدیک‌تر باشد، مورد نظر است.

تحقیق در مورد جستجوی نزدیک‌ترین هدف در مدل‌های غیرشعاعی، با مطالعه بریک آغاز شد (Briec, 1998)، به این صورت که تابع فاصله هولدر برای تعیین کمترین فاصله هدف در مرز از DMU ارزیابی‌شده معرفی شد تا کارایی را اندازه‌گیری کند. این ایده بعدها در بریک و لمیر (Briec and Lemaire, 1999)، بریک و لسورد (Briec and Lesourd, 1999) و بریک و لئو (Briec and Leleu, 2003) برای اندازه‌گیری کارایی در موقعیت‌های مختلف، استفاده شد. به طور مشابه، فاصله اقلیدسی توسط فری و هارکر (Frei and Harker, 1999) برای تعیین نزدیک‌ترین هدف و توسط بایک و لی (Baek and Lee, 2009) برای محاسبه حداکثر کارایی RAM استفاده شد. همچنین امیر تیموری و کردرستمی (۲۰۱۰) از آن برای اندازه‌گیری کارایی از طریق یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط استفاده کردند. همان‌طور که در آپاریسیو و پاستور (Aparicio and Pastor, 2014) نشان داده شده است، این مدل ممکن است منجر به نشدنی شود. گونزالز و آلوارز (González and Alvarez, 2001)، مفهوم انقباضات ویژه ورودی را برای یافتن نزدیک‌ترین هدف برحسب کارایی ورودی راسل معرفی کردند. با این حال، در آپاریسیو و همکاران (Aparicio et al., 2017) نشان داده شد که این امر ممکن است همیشه کارساز نباشد. پورتلا و همکاران (Portela et al., 2003) نزدیک‌ترین هدف را برحسب کارایی جستجو کردند که به عنوان حاصلضرب میانگین کارایی ورودی و میانگین کارایی خروجی تعریف شده است. آپاریسیو و همکاران (۲۰۰۷) مدل پوششی و مدل مضربی را به منظور ایجاد یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط ترکیب کردند که نزدیک‌ترین هدف را می‌تواند به طور کارا پیدا کند و اندازه‌های کارایی مختلف را براساس آن می‌توان تعریف کرد. این مدل دارای کاربردها و توسیع‌های فراوانی است. اگرچه این روش‌ها را می‌توان برای یافتن نزدیک‌ترین هدف، به کار برد، با این حال، کارایی محاسبه‌شده از هدف نمی‌تواند خاصیت یکنوایی را برآورده کند که در زمانی که برخی خروجی‌ها افزایش و/یا برخی ورودی‌ها کاهش می‌یابند، نیاز به کارایی یک DMU ناکارا دارد.

مطالعات دیگری نیز در مورد موضوع نزدیک‌ترین هدف، صورت گرفته است. سوزوکی و همکاران (Suzuki et al., 2010)، رویکرد به حداقل رساندن اصطکاک فاصله را برای تعیین نزدیک‌ترین هدف پیشنهاد کردند. وکیلی و همکاران (۲۰۲۰) نشان دادند که این رویکرد می‌تواند به نقطه هدف خارج از مجموعه امکان تولید (PPS) منتهی شود و رویکرد را اصلاح کردند تا اطمینان حاصل شود که هدف، در مرز تولید قرار دارد. جهانشاهلو و همکاران (۲۰۱۲) یک مدل برنامه‌ریزی دوسطحی را برای یافتن نزدیک‌ترین هدف براساس L_1 -فاصله و

L_{∞} - فاصله پیشنهاد دادند و ثابت کردند که مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط آپاریسیو و همکاران (۲۰۰۷)، حالتی از L_1 - فاصله است. آپاریسیو و همکاران (۲۰۱۷a) و آپاریسیو و همکاران (۲۰۱۷b) از یک شاخص نوع لوئبرگر برای اندازه‌گیری تغییرات در بهره‌وری براساس نزدیک‌ترین هدف ارزیابی شده به DMU، استفاده کردند. وکیلی و دیزجی (۲۰۲۱) یک الگوریتم شمارشی تحت فناوری پوسته‌ی دسترس‌پذیری آزاد را برای به دست آوردن حداقل فاصله هدف، طراحی کردند. آپاریسیو (۲۰۱۶) یک نظرسنجی را در مورد روش‌های مورد استفاده برای یافتن حداقل فاصله هدف، انجام داد.

یکنوایی، خاصیت مهمی است که یک اندازه کارایی باید آن را برآورده کند. آپاریسیو و پاستور (۲۰۱۳) و آپاریسیو و پاستور (۲۰۱۴) به ترتیب به دنبال نزدیک‌ترین هدف برحسب اندازه خروجی راسل و فاصله هولدر بزرگ‌تر، در سطح PPS تعمیم‌یافته تعریف شده در اولسن و پترسن (۱۹۹۶) بودند. خاصیت یکنوایی برای حالت ورودی یا خروجی برآورده می‌شود. حالت بدون ماهیت، تحت برخی از شرایط انتظام، برآورده می‌شود. در روش آنها، تمام جنبه‌های کارا با بعد کامل باید شمارش شوند که از نظر محاسباتی، ناکارا است. با این حال، این فرآیند دشوار را می‌توان به عنوان یک برنامه دوسطحی و براساس ایده ارائه شده در آپاریسیو و همکاران (۲۰۲۰) برای مسائل چند معیاره فرموله کرد. آپاریسیو و همکاران (۲۰۱۷) یک مدل برنامه‌ریزی دوسطحی را توسعه دادند که برنامه سطح بالاتر در آن، اندازه خروجی راسل را به حداقل می‌رساند و برنامه سطح پایین‌تر در آن، اسلک‌های خروجی وزن‌دار را در یک مدل جمعی به حداکثر می‌رساند. جواب این مدل، براساس شرایط کاروش-کون-تاکر می‌باشد که شامل معادلات غیرخطی است و یک مجموعه مرتب خاص، برای یک جواب، مورد نیاز است. همچنین، این روش برای حالت‌هایی که هم ورودی‌ها و هم خروجی‌ها در نظر گرفته می‌شوند، کاربرد ندارد. آپاریسیو و همکاران (۲۰۱۸) از این روش برای ارزیابی کارایی مدارس در کشورهای سازمان همکاری و توسعه اقتصادی استفاده کردند. آپاریسیو و همکاران (۲۰۲۰) مسئله ترکیب شاخص را به عنوان یک مسئله اندازه‌گیری کارایی DEA بدون ورودی‌های واقعی، در نظر گرفتند و یک اندازه خروجی راسل مرتبط با PPS تعمیم‌یافته را پیاده‌سازی کردند تا یک شاخص ترکیبی با کوتاه‌ترین فاصله را تعریف کنند که یکنوایی قوی را برآورده می‌کند. با این حال، این روش محدود به حالت‌هایی می‌شود که فقط دارای خروجی هستند. ساکیتانی و ژائو (Sakitani and Zhao, 2023) یک کلاس از مدل‌های غیرخطی DEA، از جمله مدل SBM را پیشنهاد کردند که قادر به ارائه یک حداکثر اندازه کارایی یکنوا است. اندازه‌های کارایی پیشنهادی با افزودن محدودیت‌های وزنی، در یکنوایی قوی صدق می‌کنند.

آندو و همکاران (۲۰۱۲) از دیدگاه نظری، نشان دادند که هیچ اندازه کارایی با حداقل فاصله p -نرم وجود ندارد که یکنوایی را برآورده کند. آنها مفهوم مجموعه دسترس‌پذیری آزاد را پیشنهاد کردند به طوری که کارایی اندازه‌گیری شده، یکنوایی ضعیف را برآورده می‌کند. این ایده در آپاریسیو و همکاران (۲۰۱۷) استفاده شد تا یک شاخص از نوع لوئبرگر که یکنوایی ضعیف را برآورده می‌کند، پیشنهاد دهند. فوکویاما و همکاران (Fukuyama et al., 2014) ایده مجموعه دسترس‌پذیری آزاد را به یک مجموعه مبادله تعمیم دادند تا کارایی‌هایی را به دست آورند که یکنوایی قوی را برآورده کنند. ژو و همکاران (Zhu et al., 2018) با ترکیب ایده‌های این دو مطالعه با مدل ارائه شده در آپاریسیو و همکاران (۲۰۰۷) و تعریف کارایی SBM به طور مناسب، دو مدل را برای محاسبه کارایی‌های SBM توسعه دادند که به ترتیب، یکنوایی ضعیف و قوی را برآورده می‌کنند.

مدل‌های DEA متداول در زمان اندازه‌گیری کارایی، DMU را به عنوان یک واحد کلی (جعبه سیاه) در نظر می‌گیرند. در واقع، یک DMU، به عنوان یک سیستم با کل واحدها، معمولاً از چندین بخش تشکیل شده است که به طور مستقل عمل می‌کنند. در کائو و هوانگ (Kao and Hwang, 2010) نشان داده شد که اگر عملیات بخشی در نظر گرفته نشود، کارایی یک DMU می‌تواند شبهه‌برانگیز باشد. همچنین، بدون در نظر گرفتن بخش‌بندی مولفه‌ها، نمی‌توان بخشی از سیستم که موجب عملکرد نامطلوب سیستم شده است و نیاز به بهبود دارد را شناسایی کرد. بنابراین، مطلوب است که DMU را به عنوان یک سیستم شبکه‌ای متشکل از بخش‌ها برای محاسبه کارایی در هر زمانی که داده‌ها در دسترس هستند، در نظر بگیریم. مقاله‌های بسیاری در مورد اندازه‌های کارایی سیستم‌های شبکه‌ای وجود دارد. آلوز و مزا (Alves and Meza, 2023)، ۹۷ مقاله منتشر شده بین سال‌های ۲۰۰۹ و ۲۰۲۱ را بررسی کردند که اندازه‌های مبتنی بر اسلک را مورد بحث قرار می‌دهند. هیچ‌یک از آنها با نزدیک‌ترین اندازه هدف، در ارتباط نیستند. لوزانو و خضری (Lozano and Khezri, 2021) برای نزدیک‌ترین اندازه‌های هدف، مدل تابع فاصله جهت‌دار پیشنهادی در لوزانو و سلطانی (۲۰۱۸) برای سیستم‌هایی با کل واحدها را به سیستم‌های شبکه‌ای تعمیم دادند. آنها توانستند ناکارایی سیستم را به ناکارایی‌های بخشی و محصول بینابینی تجزیه کنند. اندازه عملکرد

به جای اینکه براساس کارایی باشد، براساس ناکارایی است. آن و همکاران (An et al., 2021) به دنبال نزدیک‌ترین هدف برای یک سیستم دو مرحله‌ای برحسب اندازه با محدوده تنظیم‌شده بودند. کارایی مربوطه ممکن است خاصیت یکنوایی را برآورده نکند. کائو (۲۰۲۲) براساس ایده ژو و همکاران (Zhu et al., 2018) برای سیستم‌هایی باکل واحدها، مدلی را برای واحدهای تولیدی با داده‌های چند دوره‌ای را توسعه دادند تا حداکثر کارایی SBM که یکنوایی را برآورده می‌سازد، اندازه‌گیری کنند. سیستم را می‌توان به عنوان یک سیستم موازی در نظر گرفت و کارایی سیستم را می‌توان به میانگین وزنی کارایی‌های بخش‌ها، تجزیه کرد. کائو (۲۰۲۲) از همین ایده برای ساخت مدلی استفاده کرد که می‌تواند برای اندازه‌گیری حداکثر کارایی SBM برای یک سیستم متوالی استفاده شود که یکنوایی را نیز برآورده می‌کند. یکنوایی کارایی سیستم را می‌توان به حاصل ضرب کارایی‌های بخش، تجزیه کرد.

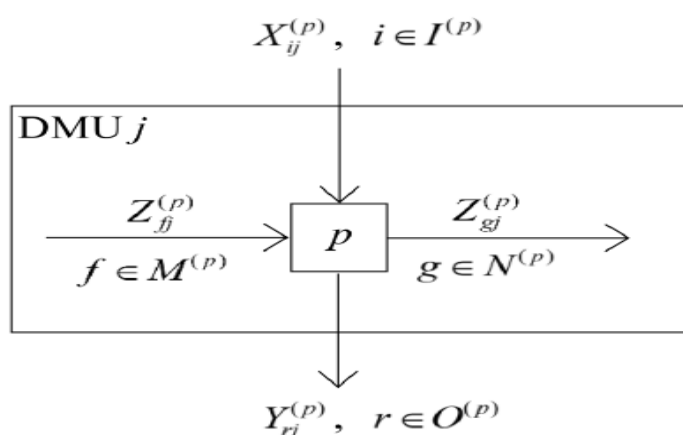
مشکل اصلی برای یافتن نزدیک‌ترین هدف، دستیابی به مرزهایی با کارایی ضعیف است. اکثر مطالعات، به‌منظور حذف مرزهایی با کارایی ضعیف، مفروضات اضافی را بر PPS تحمیل می‌کنند. در این مقاله، PPS متداول تعریف شده در بنکر و همکاران (۱۹۸۴) بدون مفروضات بیشتر، استفاده می‌شود. به طور خاص، ایده‌های سیستم موازی و سیستم متوالی، برای محاسبه حداکثر کارایی SBM که خاصیت یکنوایی دارد، به سیستم‌های شبکه‌ای کلی بسط داده شده است. کارایی بخش را می‌توان در همان زمان محاسبه کرد. بخش‌هایی که موجب عملکرد نامطلوب DMUهای ناکارا می‌شوند را می‌توان براساس کارایی بخش، شناسایی کرد. مدل پیشنهادی، برای اندازه‌گیری کارایی‌های سیستم و بخش در تولید پوشاک استفاده می‌شود که برخی از رویدادها در آن، تحلیل می‌شوند.

۲- سیستم‌های شبکه‌ای

یک سیستم شبکه‌ای کلی متشکل از q بخش را در نظر بگیرید. بخش p از $DMU j$ ، ورودی‌های برون‌زای $X_{ij}^{(p)}, i \in I^{(p)}$ که از خارج تولید می‌شوند و ورودی‌های درون‌زای (محصولات بینابینی) $Z_{fj}^{(p)}, f \in M^{(p)}$ که در داخل سیستم توسط بخش‌های دیگر تولید می‌شود را استفاده می‌کند تا خروجی‌های برون‌زای $Y_{rj}^{(p)}, r \in O^{(p)}$ ارسال شده از سیستم و خروجی‌های درون‌زای (محصولات بینابینی) $Z_{gi}^{(p)}, g \in N^{(p)}$ را برای استفاده توسط سایر بخش‌ها در سیستم، تولید کند که $M^{(p)}, I^{(p)}, O^{(p)}$ و $N^{(p)}$ در آن، به ترتیب مجموعه‌های شاخص ورودی برون‌زا، ورودی درون‌زا، خروجی برون‌زا و خروجی درون‌زا برای بخش p هستند. شکل ۱ ساختار سیستم شبکه‌ای کلی را نشان می‌دهد.

۲-۱- مدل شعاعی

فرض کنید $X_{ij} = \sum_{p=1}^q X_{ij}^{(p)}$ و $Y_{rj} = \sum_{p=1}^q Y_{rj}^{(p)}$ ، به ترتیب مقدار کل ورودی مصرفی و مقدار کل خروجی تولیدی r توسط تمام بخش‌های $DMU j$ را نشان دهند. همچنین فرض کنید برای سادگی در نمادگذاری داشته باشیم $\cup_{p=1}^q I^{(p)} = \{1, \dots, m\}$ ، $\cup_{p=1}^q M^{(p)} = \cup_{p=1}^q N^{(p)} = \{1, \dots, h\}$ و $\cup_{p=1}^q O^{(p)} = \{1, \dots, s\}$



شکل ۱. ساختار سیستم شبکه‌ای کلی.

شکل مضربی مدل شعاعی برای محاسبه کارایی ghe^{\wedge} در $DMU k$ تحت فناوری VRS به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 E_k^{NW} &= \max \sum_{r=1}^s u_r Y_{rk} - \sum_{p=1}^q u_0^{(p)} \quad (1) \\
 \text{s.t. } &\sum_{i=1}^m v_i X_{ik} = 1 \\
 &\sum_{r \in O(p)} u_r Y_{rj}^{(p)} + \sum_{g \in N(p)} w_g Z_{gj}^{(p)} - u_0^{(p)} - \left(\sum_{i \in I(p)} v_i X_{ij}^{(p)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{f \in M(p)} w_f Z_{fj}^{(p)} \right) \leq 0, \quad p = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \\
 &u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m \\
 &u_0^{(p)}, w_f \text{ نامحدود در علامت}, p = 1, \dots, q, f = 1, \dots, h,
 \end{aligned}$$

که ε در آن، یک عدد کوچک غیرارشمیدی است که برای توضیح اثر ناشی از مرز کارای ضعیف استفاده می‌شود. شکل پوششی مدل شعاعی که دوگان مدل (۱) می‌باشد، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 E_k^{NW} &= \min \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \quad (2) \\
 \text{s.t. } &\sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)} + s_i^- = \theta X_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \\
 &\sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)} + s_r^+ = Y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s \\
 &\sum_{\substack{p, \text{ such that} \\ f \in N(p)}} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Z_{fj}^{(p)} = \sum_{\substack{p, \text{ such that} \\ f \in M(p)}} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Z_{fj}^{(p)}, \quad f = 1, \dots, h \\
 &\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1, \\
 &p = 1, \dots, q \\
 &\lambda_j^{(p)}, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \\
 &\forall p, j, i, r,
 \end{aligned}$$

اگر فرض شود که فناوری بخش p برابر با CRS است، آنگاه محدودیت $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1$ حذف می‌شود. محدودیت برابری برای محصول بینابینی دلالت بر این دارد که یک حالت مشارکتی در نظر گرفته می‌شود، به این صورت که محصول بینابینی تولید شده توسط بخش‌های عرضه‌کننده، به طور کامل توسط بخش‌های تقاضاکننده مصرف می‌شود. در حالت‌های غیرمشارکتی، علامت "=" با علامت " \geq " جایگزین می‌شود. کائو [۳۵] بحث مفصلی از این دو حالت را ارائه کرد.

۲-۲-۲ مدل SBM

مدل شعاعی، کارایی را برحسب ورودی و خروجی اندازه‌گیری می‌کند. مشکلی که توسط مدل (۲) آشکار شد این است که کارایی‌های DMUهای خارج از مخروط امکان تولید به مقدار اختصاص داده‌شده به عدد غیرارشمیدی ε بستگی دارد. یکی از راهکارهای

این مشکل، استفاده از مدل SBM است که توسط پاستور و همکاران (۱۹۹۹) و تن (۲۰۰۱) پیشنهاد شده است. مدل SBM، همان ناحیه شدنی تعریف شده در مدل شعاعی (۲) را دارد، با این تفاوت که محاسبه کارایی، متفاوت است:

$$\begin{aligned} \rho_k^{\min} &= \min \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / X_{ik}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / Y_{rk}} \quad (3) \\ \text{s.t. } &\sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)} + s_i^- = X_{ik}, \\ &i = 1, \dots, m \\ &\sum_{p=1}^q \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)} - s_r^+ = Y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s \\ &\sum_{\substack{p, \text{ such that } \\ f \in N^{(p)}}} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Z_{fj}^{(p)} = \sum_{\substack{p, \text{ such that } \\ f \in M^{(p)}}} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} Z_{fj}^{(p)}, \quad f = 1, \dots, h \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(p)} = 1, \quad p = 1, \dots, q \\ &\lambda_j^{(p)}, s_i^-, s_r^+ \geq 0. \\ &\forall p, j, i, r. \end{aligned}$$

لوزانو (۲۰۱۵) مدل مشابهی را برای حالت غیرمشارکتی ساخت. مشابه با جعبه سیاه که کارایی SBM در آن کوچک‌تر یا مساوی با کارایی BCC است و همان‌طور که در قضیه زیر ثابت شده، این رابطه برای سیستم شبکه‌ای نیز صادق است: هدف مربوط به کارایی ρ_k^{\min} که از مدل (۳) محاسبه شده است، دورترین فاصله را تا DMU ارزیابی شده دارد. برای یافتن نزدیک‌ترین هدف، به دنبال حداکثر مقدار هستیم. مدل زیر با تعمیم ایده آپاریسیو و همکاران (۲۰۰۷) برای سیستم‌های جعبه سیاه به سیستم‌های شبکه‌ای، توسعه داده شده است:

$$\begin{aligned} \rho_k^{\max} &= \max \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / X_{ik}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / Y_{rk}} \quad (4) \\ \text{s.t. } &\sum_{p=1}^q \sum_{j \in T^{(p)}} \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)} + s_i^- = X_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.4) \\ &\sum_{p=1}^q \sum_{j \in P^{(p)}} \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)} - s_r^+ = Y_{rk}, \quad r = 1, \dots, s \quad (2.4) \\ &\sum_{\substack{p, \text{ such that } \\ f \in N^{(p)}}} \lambda_j^{(p)} Z_{fj}^{(p)} = \sum_{\substack{p, \text{ such that } \\ f \in M^{(p)}}} \lambda_j^{(p)} Z_{fj}^{(p)} \quad (3.4) \\ &\sum_{j \in T^{(p)}} \lambda_j^{(p)} Z_{fj}^{(p)}, \quad f = 1, \dots, h \\ &\sum_{j \in T^{(p)}} \lambda_j^{(p)} = 1, \quad p = 1, \dots, q \quad (4.4) \end{aligned}$$



$$\sum_{r \in O^{(p)}} u_r Y_{rj}^{(p)} + \sum_{g \in N^{(p)}} w_g Z_{gj}^{(p)} - u_0^{(p)} - \left(\sum_{i \in I^{(p)}} v_i X_{ij}^{(p)} + \sum_{f \in M^{(p)}} w_f Z_{fj}^{(p)} \right) + d_j^{(p)} = 0, j \in T^{(p)}, \quad p = 1, \dots, q \quad (5.4)$$

$$u_r, v_i \geq 1, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \quad (6.4)$$

$$d_j^{(p)} \leq M B_j^{(p)}, \lambda_j^{(p)} \leq M (1 - B_j^{(p)}), \quad (7.4)$$

$$B_j^{(p)} \in \{0, 1\}, j \in T^{(p)}, \quad p = 1, \dots, q$$

$$\lambda_j^{(p)}, d_j^{(p)}, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad j \in T^{(p)}, \quad \forall p, i, r, \quad (8.4)$$

$$u_0^{(p)}, w_f \text{ نامحدود در علامت } f = 1, \dots, h, \quad p = 1, \dots, q, \quad (9.4)$$

که $T^{(p)}$ در آن، مجموعه شاخص برای DMU هایی است که بخش p آنها کارا است.

ایده این مدل، شناسایی تمام سطوح مرزی براساس رابطه اولیه-دوگان یک مدل جمعی است [۲۵]. محدودیت‌های (۱.۴)–(۴.۴)، شامل محدودیت‌های فرم پوششی برای تعیین نقطه هدف

$\left(\sum_{p=1}^q \sum_{j \in T^{(p)}} \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)}, \sum_{p=1}^q \sum_{j \in T^{(p)}} \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)}, \sum_{p, \text{ such that } f \in N^{(p)}} \sum_{j \in T^{(p)}} \lambda_j^{(p)} Z_{fj}^{(p)} \right)$ در یک سطح مرزی هستند و

محدودیت‌های (۵.۴)–(۶.۴)، شامل محدودیت‌های فرم مضربی برای تعیین ابرصفحه تکیه‌کننده

$\sum_{r \in O^{(p)}} u_r Y_{rj}^{(p)} + \sum_{g \in N^{(p)}} w_g Z_{gj}^{(p)} - u_0^{(p)} - \left(\sum_{i \in I^{(p)}} v_i X_{ij}^{(p)} + \sum_{f \in M^{(p)}} w_f Z_{fj}^{(p)} \right) = 0$ هستند که شامل سطحی است که

هدف، در آن قرار دارد. محدودیت (۷.۴)، این دو نوع محدودیت را به یکدیگر مرتبط می‌سازد. اگر یک j DMU برای بیان نقطه هدف (با

$\lambda_j^{(p)} > 0$) انتخاب شده باشد، آنگاه ابر صفحه مربوط به این DMU باید شامل نقطه هدف (با $d_j^{(p)} = 0$) باشد. ثابت M یک عدد بزرگ

است و در مقدار پیشنهادی در کائو (۲۰۲۲) به صورت $M = 10 \times m \times \max\{X_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ تنظیم شده است.

مدل (۴) برای انواع سیستم‌های شبکه‌ای، مناسب است. در زمان مواجهه با یک سیستم با ساختار خاص، محدودیت‌های (۳.۴) و (۵.۴) به

طور مناسب فرموله می‌شوند. به عنوان مثال، در زمانی که سیستم دارای ساختار متوالی باشد، آنها به فرم فرموله‌شده در کائو (۲۰۲۲)

تبدیل می‌شوند و زمانی که سیستم دارای ساختار موازی است، به فرم فرموله‌شده در کائو (۲۰۲۲) تبدیل می‌شوند. نکته مورد اشاره دیگر

این است که این مدل، یک برنامه‌ریزی کسری خطی عدد صحیح مختلط است که با استفاده از تکنیک جایگزینی متغیر، می‌تواند به یک

برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط تبدیل شود.

محدودیت (۷.۴) اعمال می‌شود تا اطمینان حاصل شود که اگر $\lambda_j^{(p)} > 0$ باشد آنگاه $d_j^{(p)} = 0$ است و اگر $d_j^{(p)} > 0$ باشد آنگاه $\lambda_j^{(p)} = 0$

است. به عبارت دیگر داریم $\lambda_j^{(p)} d_j^{(p)} = 0$. این محدودیت غیرخطی را می‌توان به عنوان یک مجموعه مرتب‌خاص (SOS) شناسایی کرد

که یک زوج از متغیرها را مشخص می‌کند که نمی‌توانند در همان زمان مثبت باشند. در این حالت از اختصاص مقادیر مناسب به M -

بزرگ که دشوار است، اجتناب می‌شود. با توجه به اینکه محدودیت‌های مدل (۴)، تمام سطوح مرزی را تعریف می‌کنند، این مدل می‌تواند

با تغییر تابع هدف «حداکثرسازی» به «حداقل‌سازی»، برای محاسبه کارایی حداقل SBM استفاده شود. با این حال، محاسبه حداقل

کارایی SBM از طریق مدل (۳)، بسیار ساده‌تر خواهد بود. یکی از مؤلفه‌های مهم مدل (۴)، $T^{(p)}$ می‌باشد که مجموعه شاخص

برای DMU هایی است که بخش p آنها کارا است. این مجموعه را می‌توان با در نظر گرفتن بخش p به عنوان یک DMU از طریق مدل

BCC زیر شناسایی کرد:

$$\begin{aligned}
 E_k^{(p)} = \max & \sum_{r \in O(p)} u_r Y_{rk}^{(p)} + \sum_{g \in N(p)} w_g Z_{gk}^{(p)} - u_0^{(p)} \\
 \text{s.t.} & \sum_{i \in I(p)} v_i X_{ik}^{(p)} + \sum_{f \in M(p)} w_f Z_{fk}^{(p)} = 1 \\
 & \sum_{r \in O(p)} u_r Y_{rj}^{(p)} + \sum_{g \in N(p)} w_g Z_{gj}^{(p)} - u_0^{(p)} \\
 & - \left(\sum_{i \in I(p)} v_i X_{ij}^{(p)} + \sum_{f \in M(p)} w_f Z_{fj}^{(p)} \right) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
 & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \\
 & u_0^{(p)}, w_f, \text{ نامحدود در علامت}, \quad f = 1, \dots, h.
 \end{aligned} \tag{5}$$

اگر $E_k^{(p)} = 1$ باشد، آنگاه k DMU در بخش p ، کارا است و $k \in T^{(p)}$ را داریم. در غیر این صورت (به‌ازای $E_k^{(p)} < 1$)، $k \notin T^{(p)}$ ناکارا است و داریم

کارایی ρ_k^{\max} محاسبه‌شده از مدل (۴) ممکن است یکنوایی را برآورده نکند. ایده ژو و همکاران (۲۰۱۸) برای به دست آوردن یک اندازه کارایی برای سیستم شبکه‌ای به کار می‌رود که یکنوایی را برآورده می‌کند. این ایده، مبتنی بر فرض دسترس‌پذیری آزاد است. اگر یک DMU $\tilde{k} = (\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k)$ فرضی، تحت تسلط DMU k موردارزیابی، کارایی بالاتری را نسبت به DMU k داشته باشد، آنگاه k DMU می‌تواند با مصرف ورودی‌های بیشتر و حذف خروجی‌های بیش از حد برای داشتن کارایی \tilde{k} DMU، به \tilde{k} DMU برسد. کارایی مربوطه $\tilde{\rho}_k^{\max}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_k^{\max} = \max & \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / \tilde{X}_{ik}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / \tilde{Y}_{rk}} \\
 \text{s.t.} & \sum_{p=1}^q \sum_{j \in T^{(p)}} \lambda_j^{(p)} X_{ij}^{(p)} + s_i^- = \tilde{X}_{ik}, \tilde{X}_{ik} = X_{ik} + t_i^+, t_i^+ \geq 0, i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{p=1}^q \sum_{j \in T^{(p)}} \lambda_j^{(p)} Y_{rj}^{(p)} - s_r^+ = \tilde{Y}_{rk}, \tilde{Y}_{rk} = Y_{rk} - t_r^-, t_r^- \geq 0, r = 1, \dots, s
 \end{aligned} \tag{6}$$

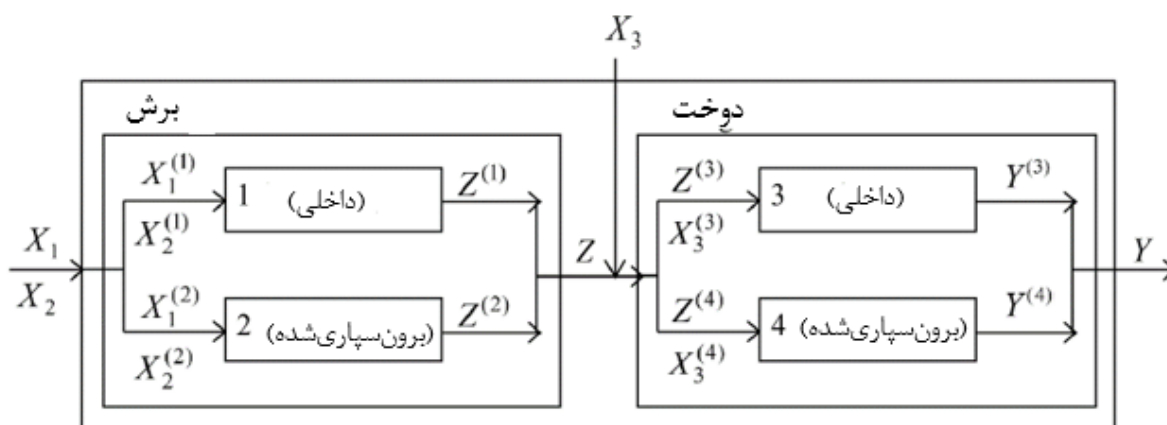
محدودیت‌های (۳.۴) - (۹.۴) در مدل (۴)، که t_i^+ و t_r^- در آن، متغیرهای مثبتی هستند که برای بیان DMUهای فرضی $\tilde{k} = (\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) = (X_{ik} + t_i^+, Y_{rk} - t_r^-)$ استفاده می‌شوند که تحت‌تسلط (X_{ik}, Y_{rk}) هستند. همچنین می‌توانیم کارایی یک DMU را به عنوان حداقل کارایی‌های آن نقاطی که بر این DMU غالب هستند تا خاصیت یکنوایی را برآورده سازند، تعریف کنیم زیرا کارایی بالاتر این DMU به دلیل مقایسه با یک مرز با کارایی ضعیف است. از آنجایی که این مطالعه، تعمیمی از تحقیقات کائو (۲۰۲۲)، برای سیستم‌های موازی و کائو (۲۰۲۲)، برای سیستم‌های متوالی است، بنابراین همین ایده برای محاسبه کارایی، دنبال می‌شود.

مدل (۴) برای تمامی حالت‌ها به عنوان مدل کلی در نظر گرفته شده است. این مدل، دارای ۹ مجموعه محدودیت و ۹ نوع متغیر است که آن را پیچیده می‌سازد. هم چنین یک برنامه‌ریزی غیرخطی محدود خطی با متغیرهای عدد صحیح است که حل آن با استفاده از حل‌کننده‌های برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) تجاری، دشوار نیست. این مدل را برای مسائل در مقیاس بزرگ یا در زمانی که یک حل‌کننده NLP در دسترس نیست، می‌توان به یک برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح باینری تبدیل کرد تا به راحتی حل شود.

۳- تولید پوشاک

تولید پوشاک دارای یک ساختار تولید متوالی است که مواد اولیه در آن، برای تبدیل به محصول نهایی، مجموعه‌ای از فرایندها را طی می‌کنند. این فرایندها به طور کلی، شامل عایق‌سازی، کنترل، برش، دوخت، شستشو، ماشین‌کاری ویژه و اتو کشی می‌شود. زمانی که سفارش طراحی لباس صورت می‌گیرد، اولین فرآیند شامل عایق‌سازی است، به این صورت که تکه‌های پارچه‌ای مختلفی که برای ساخت پوشاک استفاده می‌شود، روی یک توپ پارچه برای برش چیده می‌شوند، به طوری که ضایعات به حداقل می‌رسد. در همان زمان، پارچه‌های مورد استفاده در ساخت پوشاک، برای اطمینان از کیفیت محصول نهایی، کنترل می‌شوند. هر قسمتی که نقصی مانند لکه، سوراخ و ناهماهنگی در رنگ داشته باشد، مشخص شده است تا در حین برش از آن، جلوگیری شود. سپس پارچه کنترل شده را طبق عایق‌سازی به تکه‌هایی با اشکال مختلف، برش می‌دهند و سپس به هم دوخته می‌شوند تا تبدیل به پوشاک شوند. برخی از پوشاک سنگین ممکن است پس از دوخت، نیاز به شستشو داشته باشند، اگرچه این امر برای تمام انواع پوشاک، الزامی نیست. سایر محصولات نیز ممکن است برای قرار دادن زیپ‌ها، دکمه‌ها یا برخی جزئیات تزئینات دیگر، نیاز به ماشین‌کاری خاصی داشته باشند. اتو کشی، آخرین فرآیند است تا محصول به شکل نهایی خود برسد. برش و دوخت، دو فرآیند اصلی در تولید پوشاک هستند و اگر به طور کارا انجام شوند، کل فرآیند، کارا خواهد بود. این مقاله بر روی عملیات صورت گرفته در این دو فرآیند، تمرکز دارد.

اکثر سفارش‌ها برای شرکت مورد مطالعه در این مقاله، در داخل تولید می‌شوند، اگرچه برخی از سفارش‌ها نیز برون‌سپاری می‌شوند، و برخی دیگر نیز بخشیدار داخل صورت می‌گیرند و بخشی برون‌سپاری می‌شوند. پارچه کنترل شده، یا به بخش برش شرکت یا به شرکت‌های طرف قرارداد ارسال می‌شود تا کارگران پارچه را به صورت مجموعه‌ای از توپ‌های پارچه، برش دهند، که از این پس به عنوان محصول نیمه‌تمام (WIP) آماده برای دوخت نامیده می‌شود. کل WIP تولید شده در داخل و برون‌سپاری شده، جمع‌آوری می‌شود و مجدداً در بخش دوخت شرکت و برخی شرکت‌های طرف قرارداد برای گروه دیگری از کارگران توزیع می‌شود تا محصول نهایی را بدوزند. برخی از شرکت‌هایی که دارای قرارداد، برای برش هستند، برای دوخت نیز قرارداد دارند. در این حالت، WIP تولید شده توسط این شرکت‌ها نیازی به تحویل مجدد به شرکت مرکزی ندارد و برای عملیات دوخت بعدی، در همان مکان نگهداری می‌شود. بنابراین سیستم مورد مطالعه در این مقاله، ساختار ارائه شده در شکل ۲ را دارد که از چهار بخش برش داخلی، برش برون‌سپاری شده، دوخت داخلی و دوخت برون‌سپاری شده است.



شکل ۲. ساختار شبکه‌ای مسئله

عوامل اثرگذار بر کارایی هر سفارش را می‌توان به ورودی‌ها (X_i) ، WIP (Z) و خروجی (Y) ، تقسیم کرد. برای فرآیند برش تولید WIP از پارچه و نیروی کار استفاده می‌شود و برای تولید محصول نهایی، از نیروی کار و WIP برای فرآیند دوخت استفاده می‌شود. به طور خاص، این موارد به شرح زیر است:

پارچه (X_1) : طول پارچه مورد استفاده در برش برحسب یارد

نیروی کار (X_2) : تلاش اختصاص داده شده به برش، برحسب نفر ساعت

نیروی کار (X_3) : تلاش اختصاص داده شده به دوخت، برحسب نفر ساعت.

محصول نیمه‌تمام (Z) : مجموعه‌ای از توپ‌های پارچه.

پوشاک (Y): محصول نهایی، به صورت توپ‌ها.

سفارش‌هایی که از مقدار ورودی‌های کمتری برای تولید خروجی بیشتر استفاده می‌کنند، کارا تر هستند.

در این سیستم، ورودی‌های X_1 و X_2 ، توسط بخش‌های ۱ و ۲ برای تولید محصول بینابینی Z و ورودی X_3 و محصول بینابینی Z توسط بخش‌های ۳ و ۴ برای تولید خروجی Y استفاده می‌شوند. مدل شعاعی به فرم مضربی برای محاسبه کارایی این سیستم شبکه‌ای براساس فرم کلی مدل (۲)، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E_k^{NW} = \max u_1 & \left(Y_k^{(3)} + Y_k^{(4)} \right) - \left(u_0^{(1)} + u_0^{(2)} + u_0^{(3)} + u_0^{(4)} \right) \quad (7) \\ \text{s.t.} \quad v_1 & \left(X_{1k}^{(1)} + X_{1k}^{(2)} \right) + v_2 \left(X_{2k}^{(1)} + X_{2k}^{(2)} \right) + v_3 \left(X_{3k}^{(3)} + X_{3k}^{(4)} \right) = 1 \\ wZ_j^{(1)} - u_0^{(1)} - & \left(v_1 X_{1j}^{(1)} + v_2 X_{2j}^{(1)} \right) \leq 0, j = 1, \dots, n \\ wZ_j^{(2)} - u_0^{(2)} - & \left(v_1 X_{1j}^{(2)} + v_2 X_{2j}^{(2)} \right) \leq 0, j = 1, \dots, n \\ u_1 Y_j^{(3)} - u_0^{(3)} - & \left(v_3 X_{3j}^{(3)} + wZ_j^{(3)} \right) \leq 0, j = 1, \dots, n \\ u_1 Y_j^{(4)} - u_0^{(4)} - & \left(v_3 X_{3j}^{(4)} + wZ_j^{(4)} \right) \leq 0, j = 1, \dots, n \\ u_1, v_1, v_2, v_3 & \geq 3 \\ u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, u_0^{(3)}, u_0^{(4)}, w & \text{ نامحدود در علامت.} \end{aligned}$$

توجه کنید که کل محصول بینابینی WIP تولیدشده در برش برابر با آن چیزی است که در دوخت استفاده می‌شود، بنابراین داریم $Z_j^{(1)} + Z_j^{(2)} = Z_j^{(3)} + Z_j^{(4)}$

مدل محاسبه حداقل کارایی SBM سیستم را می‌توان بر اساس مدل (۳) به صورت زیر فرموله کرد:

$$\begin{aligned} \rho_k^{\min} = \min & \frac{1 - \frac{1}{3} \left[s_1^- / \left(X_{1k}^{(1)} + X_{1k}^{(2)} \right) + s_2^- / \left(X_{2k}^{(1)} + X_{2k}^{(2)} \right) + s_3^- / \left(X_{3k}^{(3)} + X_{3k}^{(4)} \right) \right]}{1 + s^+ / \left(Y_k^{(3)} + Y_k^{(4)} \right)} \quad (8) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(1)} X_{1j}^{(1)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(2)} X_{1j}^{(2)} + s_1^- & = \left(X_{1k}^{(1)} + X_{1k}^{(2)} \right) \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(1)} X_{2j}^{(1)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(2)} X_{2j}^{(2)} + s_2^- & = \left(X_{2k}^{(1)} + X_{2k}^{(2)} \right) \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(3)} X_{3j}^{(3)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(4)} X_{3j}^{(4)} + s_3^- & = \left(X_{3k}^{(3)} + X_{3k}^{(4)} \right) \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(3)} Y_j^{(3)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(4)} Y_j^{(4)} - s^+ & = \left(Y_k^{(3)} + Y_k^{(4)} \right) \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(1)} Z_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(2)} Z_j^{(2)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(3)} Z_j^{(3)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(4)} Z_j^{(4)} & \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(1)} = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(2)} = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(3)} = 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(4)} = 1 & \\ \lambda_j^{(p)}, s_1^-, s_2^-, s_3^-, s^+ \geq 0, p = 1, 2, 3, 4, j = 1, \dots, n. & \end{aligned}$$

در بهینگی، ρ_k^{\min} برابر با حداقل کارایی SBM در $DMU k$ است. با توجه به اینکه برخی از بخش‌ها، عامل یکسانی (ورودی، خروجی محصول بینابینی) دارند، ناکارایی‌های این تقسیم‌بندی‌ها، قابل تشخیص نیست و فقط کارایی‌های دو عمل برش و دوخت به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \rho_k^{\text{برش}} &= \frac{1 - \frac{1}{2} \left[\left(s_1^{-*} / \left(X_{1k}^{(1)} + X_{1k}^{(2)} \right) + s_2^{-*} / \left(X_{2k}^{(1)} + X_{2k}^{(2)} \right) \right) \right]}{\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(1)*} Z_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(2)*} Z_j^{(2)} \right) / \left(Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)} \right)} \quad (9) \\ \rho_k^{\text{دوخت}} &= \frac{\frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(3)*} Z_j^{(3)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(4)*} Z_j^{(4)} \right) / \left(Z_k^{(3)} + Z_k^{(4)} \right) \right] + \left[1 - s_3^{-*} / \left(X_{3k}^{(3)} + X_{3k}^{(4)} \right) \right] \right\}}{1 + s^{+*} / \left(Y_k^{(3)} + Y_k^{(4)} \right)} \end{aligned}$$

که $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(1)*} Z_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(2)*} Z_j^{(2)} \right) / \left(Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)} \right)$ معکوس‌کاری خروجی محصول بینابینی Z برای برش است که برابر با خروجی موردانتظار تقسیم بر خروجی واقعی است و $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(3)*} Z_j^{(3)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(4)*} Z_j^{(4)} \right) / \left(Z_k^{(3)} + Z_k^{(4)} \right)$ کارایی ورودی محصول بینابینی Z برای دوخت است که برابر با ورودی مورد انتظار تقسیم بر ورودی واقعی است.

برای محاسبه کارایی حداکثر SBM، محدودیت‌های مدل پوششی (۸) و مدل مضربی (۷) در مدل (۴) گنجانده شده‌اند تا منجر به مدل زیر شود:

$$\rho_k^{\max} = \max \frac{1 - \frac{1}{3} \left[\left(s_1^- / \left(X_{1k}^{(1)} + X_{1k}^{(2)} \right) + s_2^- / \left(X_{2k}^{(1)} + X_{2k}^{(2)} \right) + s_3^- / \left(X_{3k}^{(3)} + X_{3k}^{(4)} \right) \right] }{1 + s^+ / \left(Y_k^{(3)} + Y_k^{(4)} \right)} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \sum_{j \in T^{(1)}} \lambda_j^{(1)} X_{1j}^{(1)} + \sum_{j \in T^{(2)}} \lambda_j^{(2)} X_{1j}^{(2)} + s_1^- = \left(X_{1k}^{(1)} + X_{1k}^{(2)} \right) \\ & \sum_{j \in T^{(1)}} \lambda_j^{(1)} X_{2j}^{(1)} + \sum_{j \in T^{(2)}} \lambda_j^{(2)} X_{2j}^{(2)} + s_2^- = \left(X_{2k}^{(1)} + X_{2k}^{(2)} \right) \\ & \sum_{j \in T^{(3)}} \lambda_j^{(3)} X_{3j}^{(3)} + \sum_{j \in T^{(4)}} \lambda_j^{(4)} X_{3j}^{(4)} + s_3^- = \left(X_{3k}^{(3)} + X_{3k}^{(4)} \right) \\ & \sum_{j \in T^{(3)}} \lambda_j^{(3)} Y_j^{(3)} + \sum_{j \in T^{(4)}} \lambda_j^{(4)} Y_j^{(4)} - s^+ = \left(Y_k^{(3)} + Y_k^{(4)} \right) \\ & \sum_{j \in T^{(1)}} \lambda_j^{(1)} Z_j^{(1)} + \sum_{j \in T^{(2)}} \lambda_j^{(2)} Z_j^{(2)} = \sum_{j \in T^{(3)}} \lambda_j^{(3)} Z_j^{(3)} + \sum_{j \in T^{(4)}} \lambda_j^{(4)} Z_j^{(4)} \\ & \sum_{j \in T^{(1)}} \lambda_j^{(1)} = 1, \sum_{j \in T^{(2)}} \lambda_j^{(2)} = 1, \sum_{j \in T^{(3)}} \lambda_j^{(3)} = 1, \sum_{j \in T^{(4)}} \lambda_j^{(4)} = 1 \\ & w Z_j^{(1)} - u_0^{(1)} - \left(v_1 X_{1j}^{(1)} + v_2 X_{2j}^{(1)} \right) + d_j^{(1)} = 0, \quad j \in T^{(1)} \\ & w Z_j^{(2)} - u_0^{(2)} - \left(v_1 X_{1j}^{(2)} + v_2 X_{2j}^{(2)} \right) + d_j^{(2)} = 0, \quad j \in T^{(2)} \\ & u_1 Y_j^{(3)} - u_0^{(3)} - \left(v_3 X_{3j}^{(3)} + w Z_j^{(3)} \right) + d_j^{(3)} = 0, \quad j \in T^{(3)} \\ & u_1 Y_j^{(4)} - u_0^{(4)} - \left(v_3 X_{3j}^{(4)} + w Z_j^{(4)} \right) + d_j^{(4)} = 0, \quad j \in T^{(4)} \\ & u_1, v_1, v_2, v_3 \geq 1 \\ & d_j^{(p)} \leq M B_j^{(p)}, \lambda_j^{(p)} \leq M \left(1 - B_j^{(p)} \right), B_j^{(p)} \in \{0, 1\}, j \in T^{(p)}, p = 1, 2, 3, 4 \\ & \lambda_j^{(p)}, d_j^{(p)}, s_1^-, s_2^-, s_3^-, s^+ \geq 0, \quad j \in T^{(p)}, p = 1, 2, 3, 4 \\ & u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, u_0^{(3)}, u_0^{(4)}, w \text{ نامحدود در علامت.} \end{aligned}$$

سپس از مدل (۶) پیروی می‌شود تا مدل زیر برای محاسبه حداکثر کارایی SBM ساخته شود که خاصیت تکنوایی را برآورده می‌کند:

$$\bar{\rho}_k^{\max} = \max \frac{1 - \frac{1}{3}(s_1^-/\bar{X}_{1k} + s_2^-/\bar{X}_{2k} + s_3^-/\bar{X}_{3k})}{1 + s^+/\bar{Y}_k} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \sum_{j \in T^{(1)}} \lambda_j^{(1)} X_{1j}^{(1)} + \sum_{j \in T^{(2)}} \lambda_j^{(2)} X_{1j}^{(2)} + s_1^- = \bar{X}_{1k}, \bar{X}_{1k} = (X_{1k}^{(1)} + X_{1k}^{(2)}) + t_1^+, t_1^+ \geq 0 \\ & \sum_{j \in T^{(1)}} \lambda_j^{(1)} X_{2j}^{(1)} + \sum_{j \in T^{(2)}} \lambda_j^{(2)} X_{2j}^{(2)} + s_2^- = \bar{X}_{2k}, \bar{X}_{2k} = (X_{2k}^{(1)} + X_{2k}^{(2)}) + t_2^+, t_2^+ \geq 0 \\ & \sum_{j \in T^{(3)}} \lambda_j^{(3)} X_{3j}^{(3)} + \sum_{j \in T^{(4)}} \lambda_j^{(4)} X_{3j}^{(4)} + s_3^- = \bar{X}_{3k}, \bar{X}_{3k} = (X_{3k}^{(3)} + X_{3k}^{(4)}) + t_3^+, t_3^+ \geq 0 \\ & \sum_{j \in T^{(3)}} \lambda_j^{(3)} Y_{3j}^{(3)} + \sum_{j \in T^{(4)}} \lambda_j^{(4)} Y_{3j}^{(4)} - s^+ = \bar{Y}_k, \bar{Y}_k = (Y_k^{(3)} + Y_k^{(4)}) - t^-, t^- \geq 0 \end{aligned}$$

سایر محدودیت‌ها به جز چهار مورد اول، در مدل (۱۰).

به طور مشابه می‌توان کارایی برش و دوخت را با توجه به عبارت (۹)، به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_k^{\text{برش}} &= \frac{1 - \frac{1}{2}(s_1^{*-}/\bar{X}_{1k} + s_2^{*-}/\bar{X}_{2k})}{\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(1)*} Z_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(2)*} Z_j^{(2)}\right) / (Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)})} \\ \bar{\rho}_k^{\text{دوخت}} &= \frac{1 - \frac{1}{2}\left[1 - \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(3)*} Z_j^{(3)} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(4)*} Z_j^{(4)}\right) / (Z_k^{(3)} + Z_k^{(4)}) + s_3^{*-}/\bar{X}_{3k}\right]}{1 + s^{+*}/\bar{Y}_k} \end{aligned} \quad (12)$$

۴- یک مورد

جدول ۱، داده‌های هجده سفارش را برای یک شرکت تولید پوشاک در تایوان نشان می‌دهد که بخشی از هر سفارش در داخل تولید می‌شود و قسمت باقیمانده سفارش، برون‌سپاری می‌شود. عملکرد هر سفارش را می‌توان با استفاده از مدل‌های مختلف ارزیابی کرد.

جدول ۱. داده‌های مثال تولید پوشاک.

(الف) برش						
سفارش			برون‌سپاری			
پارچه $(X_1^{(1)})$	نیروی کار $(X_2^{(1)})$	WIP $(Z^{(1)})$	پارچه $(X_1^{(2)})$	نیروی کار $(X_2^{(2)})$	WIP $(Z^{(2)})$	
4185	1304	4480	8328	1136	8915	1
75	1120	80	140	390	150	2
1356	1608	1452	1416	894	1516	3
3601	808	3855	7512	3061	8041	4
449	1120	481	467	390	500	5
1157	448	1238	2150	1380	2301	6
1466	744	974	1451	472	1000	7
171	1790	118	232	792	160	8
2418	2934	1666	1072	320	739	9
900	2686	620	371	320	256	10
131	1414	90	58	320	40	11
450	1216	310	1451	24	1000	12
2753	1758	2079	1032	24	711	13
916	2006	631	347	24	239	14
119,296	5421	78,991	114,337	21,938	75,707	15
4532	962	3330	14,592	6496	10,721	16
27,678	3906	16,559	20,620	10,480	12,336	17
49,340	5328	32,670	151,371	16,314	100,229	18

(ب) دوخت						
تولید داخلی			برون‌سپاری			
سفارش	WIP(Z ⁽³⁾)	نیروی کار (X ₃ ⁽³⁾)	پوشاک (Y ⁽³⁾)	WIP(Z ⁽⁴⁾)	نیروی کار (X ₃ ⁽⁴⁾)	پوشاک (Y ⁽⁴⁾)
1	4380	5725	4280	9015	11,832	8915
2	80	81	78	150	520	150
3	1452	1423	1360	1516	1480	1425
4	3855	4161	3800	8041	7143	7975
5	481	395	407	500	503	484
6	1238	989	1236	2301	2130	2301
7	974	2185	958	1000	1573	920
8	118	464	116	160	285	152
9	1666	2795	1574	739	1970	700
10	620	828	529	256	945	250
11	90	213	80	40	912	38
12	310	255	294	1000	2241	985
13	2079	1682	1803	711	1492	680
14	631	651	551	239	751	230
15	79,191	47,404	78,616	75,507	26,595	73,598
16	3330	6017	3288	10,721	15,178	10,721
17	16,779	8423	16,457	12,116	11,328	12,160
18	32,568	27,462	31,578	100,331	23,595	99,512

ابتدا مدل (۷) برای محاسبه کارایی شعاعی شبکه‌ای اعمال می‌شود. فقط یک سفارش کارا وجود دارد که سفارش شماره ۲ است. نتایج در ستون دوم جدول ۲ نشان داده شده است. اعداد داخل پرانتز، رتبه‌های هجده سفارش را نشان می‌دهند. سپس، مدل (۸) برای محاسبه حداقل کارایی SBM متداوله کار می‌رود. کارایی‌های برش و دوخت برای هجده سفارش را می‌توان با استفاده از عبارت (۹) محاسبه کرد. نتایج در ستون‌های ۳ تا ۵ جدول ۲، تحت عنوان "حداقل کارایی SBM" نشان داده شده است.

همان‌طور که در قضیه فوق ذکر شد، کارایی SBM شبکه‌ایدر مقایسه با کارایی شعاعی شبکه‌ای، برای هر سفارش ناکارا، کمتر است. میانگین‌ها ۰.۵۴۷۹ در مقابل ۰.۷۹۵۱ هستند که نشان می‌دهد مقدار اولی، ۳۱٪ کمتر از دومی است. رتبه‌ها براساس این دو اندازه‌گیری، با میانگین تفاضل مطلق ۱.۰۰، مشابه هستند. سیزده سفارش وجود دارد که رتبه آنها به اندازه یک یا کمتر، تفاوت دارد. مستقل بودن دو اندازه کارایی با محاسبه ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن آزمایش می‌شود. آماره آزمون به دست آمده برابر با $r_s = 0.96$ است که اندازه‌هیوند نیز می‌باشد. با توجه به اینکه احتمال به دست آوردن یک مقدار $r_s = 0.96$ کمتر از ۰.۰۰۱ است (با مقدار بحرانی ۰.۶۹ برای $n = 18$)، نتیجه می‌گیریم که این دو اندازه کارایی، مستقل نیستند. یک سفارش (DMU) با کارایی شعاعی بالا، به دنبالداشتن حداقل کارایی SBM بالاییاست. کارایی‌های SBM، این امر را نیز نشان می‌دهند که دوخت در مقایسه با برش، کمک بیشتری به کارایی سیستم می‌کند.

برای محاسبه حداکثر کارایی SBM، بایدسفارش‌های کارا (DMUs) را برای هر بخش شناسایی کنیم و مدل (۵) بدین منظور، اعمال می‌شود. به یادآورید که کارا بودن یک بخش، با در نظر گرفتن آن به عنوان یک DMU بررسی می‌شود. به عنوان مثال، براییافتن DMUهایی که بخش ۱ آنها کارا است، باید بخش ۱ را به عنوان یک DMU در نظر بگیرید که از ورودی‌های $X_1^{(1)}$ و $X_2^{(1)}$ برای تولید خروجی $Z^{(1)}$ استفاده می‌کند. مدل (۵) برای تعیین بخش‌های کارای ۱ استفاده می‌شود. مشخص شد که هفت DMU شماره ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۱۵، کارا هستند. بنابراین داریم $T^{(1)} = \{1,2,3,4,5,6,15\}$. DMUهای کارا در بخش‌های ۲، ۳ و ۴ به طور مشابه تعیین می‌شوند. نتایج به دست‌آمده عبارتند از: $T^{(2)} = \{1,2,3,5,11,12,13,14,18\}$ ، $T^{(3)} = \{2,6,15,17\}$ و $T^{(4)} = \{2,8,11,17,18\}$. مدل (۱۰) با استفاده از این مجموعه‌های شاخصبرای محاسبه حداکثر کارایی SBM اعمال می‌شود. عبارت (۹) برای محاسبه کارایی برش و دوخت اعمال می‌شود. ستون‌های شش تا هشت جدول ۲ تحت عنوان "حداکثر کارایی SBM"، نتایج را نشان می‌دهد. در نهایت، مدل (۱۱) برای

محاسبه کارایی SBM تنظیم شده اعمال می‌شود که خاصیت یکنوایی را برآورده می‌کند. در این مثال، کارایی‌های SBM تنظیم شده برای تمام سفارش‌ها یعنی $\tilde{\rho}_k^{\max}$ همان حداکثر کارایی‌های SBM اصلی آنها، یعنی ρ_k^{\max} هستند.

جدول ۲. کارایی‌های SBM شبکه‌ای برای مثال.

سفر ش	حداقل کارایی‌های SBM	حداکثر کارایی‌های SBM	حداکثر کارایی‌های RAM
	رتبه $[E_k^{NW}]$	رتبه $[\rho_k^{\min}]$ ($\rho_k^{\min}(\text{Cut}), \rho_k^{\min}(\text{Sew})$)	رتبه $[\rho_k^{\max}]$ ($\rho_k^{\max}(\text{Cut}), \rho_k^{\max}(\text{Sew})$)
	رتبه $[\eta_k^{\max}]$	رتبه $[\eta_k^{\max}]$	رتبه $[\eta_k^{\max}]$
1	0.9814[5]	0.7092[5]	0.9818
2	1[1]	1[1]	1
3	0.9369[7]	0.5243[8]	0.9848
4	0.9862[3]	0.5804[7]	0.9796
5	0.9147[8]	0.7014[6]	0.9962
6	0.9985[2]	0.8214[2]	0.9921
7	0.6132[15]	0.3821[15]	0.9936
8	0.6373[12]	0.4444[10]	0.9890
9	0.6070[16]	0.3102[18]	0.9728
10	0.5732[18]	0.3161[17]	0.9798
11	0.8177[9]	0.5021[9]	0.9967
12	0.6370[13]	0.3907[13]	0.9943
13	0.6143[14]	0.3869[14]	0.9904
14	0.5822[17]	0.3612[16]	0.9904
15	0.9828[4]	0.7880[4]	0.8835
16	0.7004[11]	0.3917[12]	0.9268
17	0.7486[10]	0.4398[11]	0.8852
18	0.9796 [6]	0.8130[3]	0.9259
میانگین	0.7951	0.5479	0.9702

حداکثر کارایی SBM در مقایسه با حداقل کارایی SBM، برای هر سفارش ناکارا، بیشتر است که میانگین دومی در آن، $35\% (= (0.7396/0.5479 - 1) \times 100\%)$ بیشتر از اولی است. در این مثال، میانگین تفاضل مطلق بین رتبه‌ها براساس این دو اندازه کارایی، فقط 1.44 رتبه است. یک آزمون همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن نیز برای آزمایش رسمی مستقل بودن این دو اندازه کارایی استفاده می‌شود. آماره آزمون به دست آمده $r_s = 0.92$ است که از مقدار بحرانی 0.69 در سطح معنی دار 0.1 درصد، بیشتر است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که این دو اندازه کارایی، همبستگی دارند.

اگرچه رتبه‌های این دو اندازه، یکسان است ولی سه DMU برتر رتبه‌بندی شده برای این دو اندازه، متفاوت هستند. حداقل اندازه کارایی، DMUها با رتبه ۲، ۶ و ۱۸ را به عنوان سه DMU برتر رتبه‌بندی می‌کند در حالی که حداکثر اندازه کارایی، DMUها با رتبه ۲، ۵ و ۱ را به عنوان سه DMU برتر رتبه‌بندی می‌کند. اگر بنا باشد که سه DMU برتر، مورد تحسین (ارزیابی) قرار گیرند، آنگاه دو DMU انتخاب خواهند شد که متفاوت از این دو اندازه باشند. تصمیم، کاملاً متفاوت است. کارایی‌هایی برش و دوخت برای حداکثر اندازه نیز نشان می‌دهد که دومی، کمک بیشتری به کارایی سیستم می‌کند. حداکثر کارایی SBM، بالاتر از حداقل کارایی SBM است. کارایی بالاتر، به دلیل مقایسه با یک هدف نزدیک‌تر است. به عنوان مثال، L_1 -فاصله بین سفارش ۱ و هدف آن که از حداقل مدل SBM محاسبه می‌شود برابر با $14.3113 (s_1^- = 0, s_2^- = 0.1619, s_3^- = 14.1494)$ است. در حالی که مقدار محاسبه شده از حداکثر مدل SBM برابر با $5.2156 (s_1^- = 0, s_2^- = 0, s_3^- = 5.2156, s^+ = 0.2417)$ است. مقدار دومی، فقط برابر با ۳۸ درصد مقدار اولی است. این نتیجه همچنین نشان می‌دهد که معیار حداکثر کارایی، هدف نزدیک‌تری را برای DMUهای ناکارا پیدا می‌کند تا با تلاش کمتر، کارا شوند.

با وجود اینکه حداقل کارایی SBM برای هر سفارش ناکارا، کمتر از کارایی شعاعی است، حداکثر کارایی SBM در برخی از سفارش‌ها از جمله شماره ۷، ۸، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ می‌تواند بیشتر از کارایی شعاعی باشد. میانگین حداکثر کارایی SBM، فقط ۷ درصد کمتر از میانگین کارایی شعاعی است. مدل (۴) برای محاسبه حداکثر کارایی SBM را می‌توان به یک برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح باینری تبدیل کرد تا جواب را به راحتی به دست آورد. با این حال مدل مربوطه آن یعنی مدل (۱۶) برای محاسبه کارایی تنظیم شده که یکنوایی را برآورده می‌کند، نمی‌تواند خطی شود. آپاریسیو و همکاران [۱۵] پیشنهاد محاسبه حداکثر کارایی RAM [۲۹] را برای یافتن نزدیک‌ترین هدفی دادند که تابع هدف آن، تابع خطی زیر است:

محاسبه حداکثر کارایی RAM برای سیستم‌های شبکه‌ای عمومی به کار برد که تابع هدف در آن، با کارایی RAM جایگزین می‌شود:

$$\eta_k^{\max} = \max. 1 - \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{R_r^+} \right) \quad (13)$$

به گونه‌ای که محدودیت‌های مدل (۴) برقرار باشد.

برای تنظیم کارایی η_k^{\max} به منظور برآورده شدن یکنوایی، از ایده مدل (۶) برای ساخت مدل زیر استفاده می‌شود:

$$\bar{\eta}_k^{\max} = \max. 1 - \frac{1}{m+s} \left(\sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{R_r^+} \right) \quad (14)$$

به گونه‌ای که محدودیت‌های مدل (۶) برقرار باشد.

توجه کنید در زمانی که \bar{X}_{ik} بسیار بزرگ و \bar{Y}_{rk} بسیار کوچک می‌شود و محدوده ورودی i و خروجی r تحت تأثیر قرار می‌دهد، مقادیر R_i^- و R_r^+ باید به طور مناسب تنظیم شوند. این مدل همچنین برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح باینری است که به راحتی قابل حل است. همان‌طور که در ستون دوم جدول ۲ نشان داده شده است، حداکثر کارایی RAM، با استفاده از داده‌های مثال پوشاک در مدل (۱۳)، محاسبه می‌شود، مقادیر با دارا بودن یکمیانگین ۰.۹۷۰۲، بزرگ هستند. این کارایی با استفاده از مدل (۱۴) برای برآورده کردن خاصیتی‌کنوایی، تنظیم می‌شود. نتایج در آخرین ستون جدول ۲ نشان داده شده‌اند. متفاوت از حالت حداکثر کارایی SBM که کارایی‌های تنظیم‌شده در آن با کارایی‌های اصلی برای همه سفارش‌ها، یکسان هستند، دوازده سفارش وجود دارند که کارایی‌های تنظیم‌شده آنها در حالت حداکثر کارایی RAM، با کارایی‌های اصلی آنها متفاوت است. این سفارش‌ها با نماد "*" در جدول ۲ مشخص شده‌اند. رتبه‌ها براساس حداکثر کارایی RAM، کاملاً متفاوت از رتبه‌ها براساس حداکثر کارایی SBM، با میانگین تفاضل مطلق پنج رتبه هستند. یک آماره $r_s = 0.2817$ با اعمال آزمون همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن، به دست می‌آید. این مقدار، کوچک‌تر از مقدار بحرانی ۰.۳۹۹۴ در سطح معنی‌داری ۵ درصد است که مستقل بودن دو اندازه کارایی را نتیجه می‌دهد.

در اندازه‌گیری کارایی، کارایی نسبیک DMU، با اضافه شدن DMUهای ناکارا، نباید افزایشیابد. بررسی دقیق‌تر کارایی $\eta_k = \text{RAM}$ نشان می‌دهد که اضافه کردن DMUهای ناکارتر ممکن است مقادیر R_i^- و R_r^+ را افزایش دهد، که متعاقباً موجب افزایش η_k خواهند شد. کارایی RAM از این منظر، علی‌رغم سهولت خطی بودن، یک‌اندازه کارایی ایده‌آل نیست.

۵- نتیجه‌گیری

مدل SBM در زمان اندازه‌گیری کارایی، تحت تأثیر مرزهای کارای ضعیف قرار نمی‌گیرد و قادر به ارائه امتیازهای کارایی مناسبی برای DMUهایی است که خارج از مخروط امکان تولید قرار دارند. بنابراین کاربرد گسترده‌ای در ارزیابی عملکرد نسبی مجموعه‌ای از DMUها دارد. مدل متداول SBM، کارایی را براساس نقطه هدفی که دورترین نقطه به DMU ارزیابی‌شده است، اندازه‌گیری می‌کند و هدفی را به دست می‌آورد که برای دستیابی به کارایی، به تلاش بیشتری نیاز دارد. در این مقاله یک مدل SBM شبکه‌ای توسعه داده شده است که می‌تواند حداکثر کارایی SBM را برای سیستم‌های تولید شبکه‌ای محاسبه کند. از آنجایی که هدف مربوطه، به DMU در حال ارزیابی، نزدیک‌تر است، تلاش کمتری برای کارا شدن DMU موردنیاز است. کارایی محاسبه‌شده از مدل توسعه‌یافته، با تعریف کارایی SBM به عنوان حداکثر کارایی نقاط تحت تسلط این DMU، خاصیت یکنوایی را برآورده می‌کند. مدل شبکه‌ای همچنین قادر به محاسبه کارایی‌های بخش است که در شناسایی بخش‌هایی که موجب عملکرد نامطلوب سیستم می‌شوند، به مدیریت کمک می‌کند. حداکثر کارایی SBM محاسبه‌شده از مدل ارائه‌شده در این مقاله، خاصیت‌های مطلوب بسیاری دارد. به منظور برآورده‌سازی خاصیت یکنوایی، ایده ژو و همکاران (۲۰۱۸) در مطالعه حاضر برای تعریف کارایی یک DMU به عنوان حداکثر کارایی تمام نقاط تحت تسلط این DMU استفاده شده است. مدل مربوطه در این حالت، یک برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح مختلط است که برای یافتن جواب بهینه، به یک حل‌کننده برنامه‌ریزی غیرخطی، نیاز است. سیستم شبکه‌ای در مقایسه با سیستم جعبه سیاه برای به دست آوردن یک جواب، مدل غیرخطی را پیچیده‌تر می‌سازد.

منابع

- Alves, C. G. M. D., & Meza, L. A. (2023). A review of network DEA models based on slacks-based measure: evolution of literature, applications, and further research direction. *International Transactions in Operational Research*, 30, 2729-2760.
- Amirteimoori, A., & Kordrostami, S. (2010). A Euclidean distance-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *Optimization*, 59, 985-996.
- An, Q., Wu, Q., Zhou, X., & Chen, X. (2021). Closest target setting for two-stage network system: an application to the commercial banks in China. *Expert Systems with Applications*, 175, 114799.
- Ando, K., Kai, A., Maeda, Y., & Sekitani, K. (2012). Least distance based inefficiency measures on the Pareto-efficient frontier in DEA. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 55, 73-91.
- Aparicio, J. (2016). A survey on measuring efficiency through the determination of the least distance in data envelopment analysis. *Journal of Centrum Cathedra*, 9, 143-167.
- Aparicio, J., Cordero, J. M., Gonzalez, M., & Lopez-Espin, J. J. (2018). Using non-radial DEA to assess school efficiency in a cross-country perspective: an empirical analysis of OECD countries. *Omega*, 79, 9-20.
- Aparicio, J., Cordero, J. M., & Pastor, J. T. (2017). The determination of the least distance to the strongly efficient frontier in data envelopment analysis oriented models: modelling and computational aspects. *Omega*, 71, 1-10.
- Aparicio, J., Garcia-Nove, E. M., Kapelko, M., & Pastor, J. T. (2017). Graph productivity change measure using the least distance to the Pareto-efficient frontier in data envelopment analysis. *Omega*, 72, 1-14.
- Aparicio, J., Kapelko, M., Mahlberg, B., & Sainz-Pardo, J. L. (2017). Measuring input-specific productivity change based on the principle of least action. *Journal of Productivity Analysis*, 47, 17-31.
- Aparicio, J., Kapelko, M., Monge, J. F. (2020). A well-defined composite indicator: an application to corporate social responsibility. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 186, 299-323.
- Aparicio, J., Pastor, J. T. (2013). A well-defined efficiency measure for dealing with closest target in DEA. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 9142-9154.
- Aparicio, J., Pastor, J. T. (2014). Closest targets and strong monotonicity on the strongly efficient frontier in DEA. *Omega*, 44, 51-57.
- Aparicio, J., Pastor, J. T. (2014). On how to properly calculate the Euclidean distance-based measure in DEA. *Optimization*, 63, 421-432.
- Aparicio, J., Pastor, J. T., Sainz-Pardo, J. L., & Vidal, F. (2020). Estimating and decomposing overall inefficiency by determining the least distance to the strongly efficient frontier in data envelopment analysis. *Operations Research*, 20, 747-770.
- Aparicio, J., Ruiz, J. L., & Sirvent, I. (2007). Closest targets and minimum distance to the Pareto-efficient frontier in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 28, 209-218.
- Baek, C., & Lee, J. D. (2009). The relevance of DEA benchmarking information and the least-distance measure. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(3-4), 265-275.
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-1092.
- Briec, W. (1998). Hölder distance function and measurement of technical efficiency. *Journal of Productivity Analysis*, 11(2), 111-131.
- Briec, W., & Leleu, H. (2003). Dual representations of non-parametric technologies and measurement of technical efficiency. *Journal of Productivity Analysis*, 20(2), 71-96.
- Briec, W., & Lemaire, B. (1999). Technical efficiency and distance to a reverse convex set. *European Journal of Operational Research*, 114(1), 178-187.
- Briec, W., & Lesourd, J. B. (1999). Metric distance function and profit: some duality results. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 101(1), 15-33.
- Chambers, R. G., Chung, Y., & Färe, R. (1996). Benefit and distance functions. *Journal of Economic Theory*, 70(2), 407-419.
- Charnes, A., Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Q*, 9(3-4), 181-186.
- Charnes, A., Cooper, W. W. (1984). The non-Archimedean CCR ratio for efficiency analysis: a rejoinder to Boyd and Färe. *European Journal of Operational Research*, 15(3), 333-334.
- Färe, R., Lovell, C. A. K. (1978). Measuring the technical efficiency of production. *Journal of Economic Theory*, 19(1), 150-162.
- Frei, F. X., Harker, P. T. (1999). Projections onto efficient frontiers: theoretical and computational extensions to DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 11(2), 275-300.
- Fukuyama, H., Maeda, Y., Sekitani, K., Shi, J. (2014). Input-output substitutability and strongly monotonic p-norm least distance DEA measures. *European Journal of Operational Research*, 237(3), 997-1007.
- González, E., Álvarez, A. (2001). From efficiency measurement to efficiency improvement: the choice of a relevant benchmark. *European Journal of Operational Research*, 133(3), 512-520.
- Jahanshahloo, G., Vakili, J., Zarepisheh, M. (2012). A linear bilevel programming problem for obtaining the closest target and minimum distance of a unit from the strong efficient frontier. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 29, Article ID 1250011.
- Kao, C. (2018). A classification of slacks-based efficiency measures in network data envelopment analysis with an analysis of the properties possessed. *European Journal of Operational Research*, 270(3), 1109-1121.
- Kao, C. (2022). Closest targets in the slacks-based measure of efficiency for production units with multi-period data. *European Journal of Operational Research*, 297(2), 1042-1054.
- Kao, C. (2022). A maximum slacks-based measure of efficiency for closed series production systems. *Omega*, 106, 102525.
- Kao, C., Hwang, S. N. (2010). Efficiency measurement for network systems: IT impact on firm performance. *Decision Support Systems*, 48(3), 437-446.
- Lozano, S. (2015). Alternative SBM model for network DEA. *Computers & Industrial Engineering*, 82, 33-40.
- Lozano, S., Khezri, S. (2021). Network DEA smallest improvement approach. *Omega*, 98, 102140.
- Lozano, S., Soltani, N. (2018). DEA target setting using lexicographic and endogenous directional distance function approaches. *Journal*

- of Productivity Analysis, 50, 55-70.
- Olesen, O. B., Petersen, N. C. (1996). Indicators of ill-conditioned data sets and model misspecification in data envelopment analysis: an extended facet approach. *Management Science*, 42(2), 205-219.
- Pastor, J. T., Ruiz, J. L., Sirvent, I. (1999). An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. *European Journal of Operational Research*, 115(3), 596-607.
- Portela, M. C. A. S., Borges, P. C., Thanassoulis, E. (2003). Finding closest targets in non-oriented DEA models: the case of convex and non-convex technologies. *Journal of Productivity Analysis*, 19(2), 251-269.
- Razipour-GhalehJough, S., Lotif, F. H., Jahanshahloo, G., Rostamy-malkhalifeh, M., Sharafi, H. (2020). Finding closest target for bank branches in the presence of weight restrictions using data envelopment analysis. *Annals of Operations Research*, 288, 755-787.
- Ruiz, J. L., Segura, J. V., Sirvent, I. (2015). Benchmarking and target setting with expert preferences: an application to the evaluation of educational performance of Spanish universities. *European Journal of Operational Research*, 242(2), 594-605.
- Ruiz, J. L., Sirvent, I. (2011). A DEA approach to derive individual lower and upper bounds for the technical and allocative components of the overall profit efficiency. *Journal of the Operational Research Society*, 62(10), 1907-1916.
- Ruiz, J. L., Sirvent, I. (2016). Common benchmarking and ranking of units with DEA. *Omega*, 65, 1-9.
- Ruiz, J. L., Sirvent, I. (2019). Performance evaluation through DEA benchmarking adjusted to goals. *Omega*, 87, 150-157.
- Sekitani, K., Zhao, Y. (2023). Least-distance approach for efficiency analysis: a framework for nonlinear DEA models. *European Journal of Operational Research*, 306(3), 1296-1310.
- Suzuki, S., Nijkamp, P., Rietveld, P., Pels, E. (2010). A distance friction minimization approach in data envelopment analysis: a comparative study on airport efficiency. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 1104-1115.
- Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 130(3), 498-509.
- Vakili, J., Amirmoshiri, H., Shiraz, R. K., Fukuyama, H. (2020). A modified distance friction minimization approach in data envelopment analysis. *Annals of Operations Research*, 288, 789-804.
- Vakili, J., Dizaji, R. S. (2021). The closest strong efficient targets in the FDH technology: an enumeration method. *Journal of Productivity Analysis*, 55(2), 91-105.
- Zhu, Q., Wu, J., Ji, X., Li, F. (2018). A simple MILP to determine closest targets in non-oriented DEA model satisfying strong monotonicity. *Omega*, 79, 1-8.

Maximum slacks-based measure of efficiency in network data envelopment analysis

Shahram Enayati Takleh*

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,
Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Hossein Azizi

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch,
Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Shahruz Fathi Ajirlu

Department of Applied Mathematics, Parsabad Moghan Branch, Islamic Azad University, Parsabad Moghan, Iran.

Abstract

The Slacks-Based Measure (SBM) model has a wide range of applications in measuring the relative efficiency of a set of Decision Making Units (DMUs) because the measured efficiency is not affected by weakly efficient frontiers. The model seeks a target point on the production frontier evaluated at the farthest location from the DMU in order to calculate efficiency and requires further effort to reach the DMU to become efficient. This paper develops a model to calculate the maximum SBM efficiency for general network production systems.

Keywords: Data envelopment analysis, Network system, Slacks-based measure

* Corresponding Author